LA GEOMETRIA SOLIDA

OVVERO

L' UNDECIMO, E DUODECIMO LIBRO

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

COLL' AGGIUNZIONE

DE' TEOREMI SULLA SFERA, E SUL CILINDRO

CONTENUTI NEL PRIMO LIBRO

DI ARCHIMEDE

E

DELLA MISURA DEL CERCHIO

Esposti dall' Abbate

BENVENUTO PERRONE

CON DEGLI ANALOGHI, ED UTILI COMENTI.



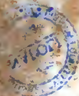
NAPOLI

DALLA STAMPERIA DI FRANCESCO FERNANDES

Salita degli Studj n.° 25.

1826.





DEGLI ELEMENTI
DI
EUCLIDE
LIBRO UNDECIMO
E DE' SOLIDI
PRIMO.



DEFINIZIONI.

I. Il solido è ciò, che ha lunghezza, larghezza, e crassezza.

II. Il termine del solido è la superficie.

III. La linea retta è perpendicolare al piano, quando fa angoli retti con tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel sottoposto piano.

IV. Il piano è perpendicolare al piano, quando in un piano tirate le linee rette perpendicolari sopra la comune sezione dei piani, saranno all'altro piano perpendicolari.

V. L'inclinazione della linea retta ad un piano è, quando dal termine sublime della linea retta, tirata la perpendicolare al piano, e dal punto in cui la perpendicolare incontra il piano, tirata un'altra linea sino al termine di essa posto nel piano, l'angolo acuto,

che si contiene dalla linea tirata, e dalla linea, che sta ferma.

VI. L'inclinazione del piano ad un' altro piano è l' angolo acuto, che è contenuto da linee rette, le quali sono tirate perpendicolari ad un punto dalla comune sezione de' piani nell' uno, e l' altro piano.

VII. Il piano dicesi similmente inclinare al piano, e l' altro all' altro, quando gli angoli della inclinazione sono uguali frà loro.

VIII. I piani paralleli sono quelli, che non convengono fra loro.

IX. Le figure solide simili sono quelle, che son contenute da' piani simili uguali di numero.

X. Le figure solide simili, ed uguali sono quelle, che si contengono da' piani simili, ed uguali di numero, e grandezza.

XI. L' angolo solido è l' inclinazione di più di due linee, le quali si tocchino, e non siano nella medesima superficie con tutte le altre linee: ovverò l'angolo solido è quello, che è compreso da più, che di due angoli piani, che non siano nel medesimo piano, e si terminino ad un punto.

XII. La piramide è una figura solida compresa da piani, la quale da un piano si constituisce ad un punto.

XIII. Il prisma è una figura solida compresa da piani, de' quali due, che sono opposti, sono uguali, e simili, e paralleli, ma gli altri sono parallelogrammi.

XIV. La sfera è una figura compresa, quando il semicerchio si girà d' intorno al diametro, che stà fermo, fino a tanto che sia riportato di nuovo al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi.

XV. L' asse della sfera è una linea retta, che sta ferma, d' intorno alla quale il semicerchio si gira.

XVI. Il centro della sfera è il medesimo, che il centro del semicerchio.

XVII. Il diametro della sfera è una linea retta, che passa per lo centro, e dall' una, e l' altra parte é terminata dalla superficie della sfera.

XVIII. Il cono è una figura compresa, quando stando fermo un lato del triangolo rettangolo di quelli che sono d' intorno all' angolo retto, il triangolo si giri, fino a tanto che di nuovo ritorni al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi: e se la linea retta, che sta ferma è uguale all' altro lato, che si gira d' intorno all' angolo retto, il cono sarà rettangolo; ma se è minore sarà ottusangolo; e se maggiore, sarà acutangolo.

XIX. L' asse del cono è la linea retta, che sta ferma, d' intorno alla quale il triangolo si rivolge.

XX. Ma la base è il cerchio descritto dalla linea retta, che si gira.

XXI. Il cilindro è una figura compresa, quando stando fermo un lato del parallelogrammo rettangolo di quelli che sono d' intorno all' angolo retto, il parallelogrammo si giri, infino a tanto che di nuovo torni al medesimo luogo, dal quale cominciò a muoversi.

XXII. L' asse del cilindro, è la linea retta, che sta ferma, d' intorno alla quale il parallelogrammo si gira.

XXIII. La base, i cerchi descritti dai due lati opposti, che si girano.

XXIV. I coni, ed i cilindri simili sono quelli

de' quali gli assi, e i diametri delle basi hanno la medesima ragione.

XXV. Il cubo è una figura solida contenuta da sei quadrati uguali.

XXVI. Il Tetraedro, ovvero Piramide, è una figura solida compresa da quattro triangoli uguali, ed equilateri.

XXVII. L'ottaedro è una figura solida compresa da otto triangoli uguali, ed equilateri.

XXVIII. Il dodecaedro é una figura solida, che è contenuta da dodici pentagoni, uguali, equilateri, ed equiangoli.

XXIX. L' Icosaedro è una figura solida, che è compresa da venti triangoli uguali, ed equilateri.

TEOR. I. PROP. I.

La linea retta non ha una parte nel sottoposto piano, un' altra in un piano elevato.

Imperocché se è possibile, la parte AB (*fig.* 1.) della linea retta ABC sia nel piano sottoposto, e la parte BC nel piano elevato: sarà una linea retta continuata nel sottoposto piano per dritto alla AB, e sia la BD: adunque a due linee rette date ABC, ABD è comune la porzione AB, che non è possibile, perciocché una linea retta con un' altra linea retta non conviene in più di un punto, altrimenti converranno insieme.

Adunque la linea retta non ha una parte nel piano sottoposto, e una parte in un piano elevato. C. B. D.

TEOR. II. PROP. II.

Se due linee rette si seghino fra loro, sono in un piano, ed ogni triangolo consiste in un piano.

Due linee rette AB, CD (*fig.* 2.) seghinsi fra loro nel punto E. Dico le AB, CD essere in un piano; ed ogni triangolo consistere in un piano.

Prendansi nelle EB, EC quali si vogliano punti F, G, e giungansi CB, FG, e si tirino FH, GK. Dico prima il triangolo ECB essere in un piano. Perciocchè se del triangolo EBC una parte FHC, ovvero GBK è nel sottoposto piano, e la rimanente in un' altro piano; sarà anche di una delle linee EB, EC parte nel sottoposto piano, e parte nell' altro e se del triangolo ECB una parte FGBC sia nel piano sottoposto, e la rimanente in un' altro: di amendue le linee rette EC, EB una parte sarà nel piano sottoposto, ed una nell' altro. Il che abbiamo dimostrato essere impossibile. Adunque il triangolo EBC è in un sol piano: e nel piano in cui è il triangolo EBC, sono amendue le linee rette EC, EB, ed in quel piano, dove sono amendue le EC, EB, nel medesimo sono le AB, CD (*prop. antec.*).

Adunque le linee rette AB, CD sono in un piano, ed ogni triangolo consiste in un sol piano. C. B. D.

TEOR. III. PROP. III.

Se due piani si seghino fra loro, la comune sezione sarà una linea retta.

Due piani AG, IIL (*fig. 3.*) si seghino fra loro, e la comune sezione loro sia la linea DB. Dico la linea DB essere retta.

Perocchè se non sia così, tirisi dal punto D al B nel piano AG la linea retta DEB, e nel piano IIL la linea retta DFB, saranno li medesimi i termini di due linee rette DEB, DFB, ed esse conterranno uno spazio, che è impossibile. Adunque le DEB, DFB non sono linee rette. Similmente dimostreremo niun' altra, che si tira dal punto D, al punto B essere retta, fuorchè la DB, cioè la comune sezione dei piani AG, IIL.

Se dunque due piani si seghino fra loro, la comune sezione sarà una linea retta C. B. D.

TEOR. IV. PROP. IV.

Se una linea retta è perpendicolare a due linee rette, che si segano fra loro nel comune segamento, sarà anche perpendicolare al piano, che passa per esse linee.

Sia la linea retta EF (*fig. 4*) perpendicolare a due linee rette AB, CD, che si segano fra loro nel punto E. Dico la EF essere anche perpendicolare sopra il piano, che passa per le AB, CD.

Prendansi le linee rette AE, EB, CE, ED uguali fra loro, e per E si conduca la linea retta GEH, in qualunque modo, e giungansi AD, CB; poi da qual si voglia punto F si tirino le FA, FG, FD, FC, FH, FB. E perchè due linee rette AE, ED sono uguali a due linee rette CE, EB, e contengo-

no angoli uguali, sarà la base AD uguale alla base CB (*prop. 4 I.*), e 'l triangolo AED uguale al triangolo CEB: adunque anche l'angolo DAE è uguale all'angolo EBC: e l'angolo AEG è uguale all'angolo BEH. Sono dunque due triangoli AEG, BEH, che hanno due angoli uguali a due angoli, l'un all'altro, ed un lato AE uguale ad un lato EB, che è d'intorno agli angoli uguali; onde avranno gli altri lati uguali agli altri lati (*prop. 26 I.*), e perciò GE è uguale ad EH, ed AG a BH. Ed essendo AE uguale ad EB, ed FE comune, e ad angoli retti; sarà la base AF uguale alla base FB, e per la medesima ragione ancora la CF sarà uguale alla FD. Inoltre perchè la AD è uguale alla CB, e la AE alla FB; saranno le due FA, AD uguali alle FB, BC, l'una all'altra; e si è dimostrata la base DF uguale alla base FC. Adunque l'angolo FAD è uguale all'angolo FBC (*prop. 8 I.*). Inoltre si è dimostrata la GA uguale a BH; ma ancora la AF è uguale alla FB: le due dunque FA, AG sono uguali alle due FB, BH, e l'angolo FAG è uguale all'angolo FBH, come si è dimostrato: onde la base FG è uguale alla base FH (*prop. 4 I.*). E perchè si è dimostrata la GE uguale alla EH, e la FE è comune, saranno le due GE, EF uguali alle due HE, EF, e la base HF uguale alla base FG: l'angolo dunque GEF è uguale all'angolo HEF, e però amendue gli angoli GEF, HEF sono retti. Adunque la FE colla GH tirata comunque per E fa gli angoli retti. Similmente dimostreremo la FE con tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel sottoposto piano, fare gli angoli retti; ma la linea retta è per-

pendicolare al piano, quando fa angoli retti colle linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano (*def. 3*). Perciò la FE è perpendicolare al sottoposto piano; ma il piano sottoposto passa per le linee rette AB, CD. Adunque la FE sarà perpendicolare al piano condotto per le AB, CD.

Laonde se una linea retta è perpendicolare a due ec. C. B. D.

TEOR. V. PROP. V.

Se una linea retta è perpendicolare a tre linee rette, che si toccano fra loro nella comune sezione, coteste tre linee saranno in un medesimo piano.

La linea retta AB (*fig. 5*) sia perpendicolare a tre linee rette BC, BD, BE nel toccamento B. Dico le BC, BD, BE essere in un piano solo.

Se è possibile siano le BD, BE nel piano sottoposto; e la BC in un piano elevato; e'l piano per le AB, BC si prolunghi. Farà la comune sezione nel sottoposto piano una linea retta (*prop. 3 XI.*): faccia BF. Dunque le tre linee rette AB, BC, BF sono in un piano che passa per le AB, BC. E perchè la AB è perpendicolare all'una, ed all'altra delle BD, BE, sarà anche perpendicolare al piano, che passa per le DB, BE (*prop. 4 XI.*): ma il piano, che passa per le DB, BE è piano sottoposto. Adunque la AB è perpendicolare al sottoposto piano, e però sarà perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano (*def. 3*): ma

BF che è nel sottoposto piano la tocca: dunque l'angolo ABF è retto; e si pone retto l'angolo ABC: è dunque l'angolo ABF uguale all'angolo ABC, e sono nel medesimo piano; che non è possibile: laonde la linea BC non è in un piano elevato. Dal che ne siegue, che le tre linee rette BC, BD, BE siano in un piano.

Se dunque una linea retta è perpendicolare ec. C. B. D.

TEOR. VI. PROP. VI.

Se due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, saranno parallele fra loro.

Due linee rette AB, CD (*fig. 6*) siano perpendicolari al sottoposto piano. Dico la AB essere parallela alla CD.

Incontrino le AB, CD il sottoposto piano ne' punti B, D: si congiunga la linea retta BD, alla quale nel sottoposto piano si tiri la perpendicolare DE: e posta la DE uguale alla AB, si uniscano BE, AE, AD. Perchè dunque la AB è perpendicolare al sottoposto piano, farà angoli retti con tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel sottoposto piano (*def. 3*): ma l'una, e l'altra delle BD, BE esistente nel sottoposto piano tocca la AB: adunque amendue gli angoli ABD, ABE sono retti. Per la stessa ragione ambo gli angoli CDB, CDE sono retti: e perchè la AB è uguale alla DE, e la BD è comune, saranno le due AB, BD uguali alle due ED, DB, e contengono angoli retti. Dunque la base AD è uguale

alla base BE *(prop. 4 I.)*: similmente perchè la AB è uguale alla DE, e la AD alla BE, le due AB, BE sono uguali alle due ED, DA, e la base di esse AE è comune; l' angolo dunque ABE è anche uguale all' angolo EDA: ma ABE è retto: adunque è retto EDA; e perciò la ED è perpendicolare alla DA: ma è perpendicolare anche all' una, e l' altra di esse BD, DC. Onde la ED è perpendicolare alle tre linee rette BD, DA, DC nel toccamento, e per tal cagione le tre linee rette BD, DA, DC sono in un piano *(prop. antec.)*, ed in qual piano sono le BD, DA, nel medesimo è la AB: perciocchè ogni triangolo è in un piano *(prop. 2 XI.)*. Adunque é necessario, che le AB, BD, DC siano in un piano, ed amendue gli angoli ABD, BDC sono retti: dunque la AB è parallela alla CD.

Laonde se due linee rette sono perpendicolari ec. C. B. D.

TEOR. VII. PROP. VII.

Se due linee rette siano parallele, e nell' una, e l' altra di esse si prendano quali si vogliano punti, la linea retta, che congiunge detti punti, sarà nel medesimo piano, nel quale sono le parallele.

Siano due linee rette parallele AB, CD *(fig. 7)*, e in amendue si prendano quali si vogliano punti E, F. Dico la linea retta, che congiunge i punti E, F essere nel medesimo piano, nel quale sono le parallele.

Se è possibile sia in un piano elevato, come EGF,

e per la EGF tirisi un piano, il quale farà la sezione nel sottoposto piano, una linea retta (*prop. 3 XI.*), la faccia come EF: adunque due linee rette EGF, EF, conterranno uno spazio, che non è possibile (*ass. 10 I.*): e perciò quella linea retta, che è tirata dal punto E ad F non è in un piano elevato, onde sarà in quello, che passa per le parallele AB, CD.

Se dunque due linee rette parallele ec. C. B. D.

TEOR. VIII. PROP. VIII.

Se due linee rette siano parallele, ed una di esse sia perpendicolare a qualche piano, l'altra ancora sarà perpendicolare al medesimo piano.

Siano due linee rette parallele AB, CD (*fig. 8*), ed una di esse AB sia perpendicolare al sottoposto piano. Dico ancora la rimanente CD essere al medesimo piano perpendicolare.

Incontrino le AB, CD il sottoposto piano ne' punti B, D, e giungasi BD: adunque le AB, CD, BD sono in un piano (*prop. antec.*). Tirisi la DE nel sottoposto piano perpendicolare alla BD, e si ponga la DE uguale alla AB: e si congiungano BE, AE, AD. E perchè la AB è perpendicolare al sottoposto piano, sarà perpendicolare ancora a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel sottoposto piano: adunque amendue gli angoli ABD, ABE sono retti. Laonde cadendo la BD nelle linee rette parallele AB, CD, saranno gli angoli ABD CDB uguali a due retti (*prop. 29 I.*): ma è retto ABD: adunque an-

cora CDB è retto, e perciò la CD è perpendicolare alla BD. E perchè la AB è uguale alla DE, e la BD comune, le due AB, BD sono uguali alle due ED, DB; e l'angolo ABD è uguale all'angolo EDB, perciocchè amendue sono retti: adunque la base AD è uguale alla base BE (*prop. 4 I.*). Inoltre perchè la AB è uguale alla DE, e la BE alla AD, saranno le due AB, BE uguali alle due ED, DA, l'una all'altra, e la base loro AE è comune: onde l'angolo ABE è uguale all'angolo EDA (*prop. 8 I.*) ed è retto ABE: adunque è pur retto EDA, e la ED è perpendicolare alla DA: ma è anche perpendicolare alla BD. Adunque la ED sarà anche perpendicolare al piano, che passa per le BD, DA (*prop. 4 XI.*), e con tutte le linee rette, che essendo nel medesimo la toccano, farà angoli retti (*def. 3*). Ma la DC è nel piano che passa per le BA, AD, perchè nel piano per le BD, DA sono le AB, BD(*prop. 2 XI.*), ed in qual piano sono le AB, BD, è la DC: onde la ED è perpendicolare alla DC; e però la CD è perpendicolare alla DE; ma ancora la CD è perpendicolare alla DB: adunque la CD è perpendicolare a due linee rette DE, DB, che si segano fra loro nella comune sezione D, e però è perpendicolare al piano, che passa per le DE, DB: ma il piano per le DE, DB è sottoposto piano. Adunque la CD sarà perpendicolare al sottoposto piano.

Laonde se due linee rette siano parallele ec. C. B. D.

TEOR. IX. PROP. IX.

Le linee parallele ad una medesima, che non sono nel medesimo piano, saranno altresì fra loro parallele.

Sia l' una, e l' altra delle AB, CD (*fig. 9*) parallela alla EF, che non siano nel medesimo piano, nel quale è essa. Dico la AB essere parallela alla CD.

Prendasi nella EF qual si voglia punto G, dal quale si tiri la GH perpendicolare alla EF nel piano che passa per le EF, AB; e nel piano che passa per le FE, CD tirisi la GK perpendicolare alla FE. E perchè la EF è ad amendue GH, GK perpendicolare, sarà ancora perpendicolare al piano, che passa per GH, GK, e la FE è parallela alla AB: adunque anche la AB è perpendicolare al piano, che passa per HGK (*prop. 4 XI.*); e per la medesima ragione la CD è perpendicolare al piano, che passa per HGK (*prop. antec.*): l' una e l' altra dunque delle AB, CD sarà perpendicolare al piano per HGK. Ma se due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, saranno parallele fra loro (*prop. 6 XI.*). Adunque la AB è parallela alla CD.

Laonde le linee rette parallele ad una ec. C.B.D.

TEOR. X. PROP. X.

Se due linee rette che si toccano sono parallele a due altre linee rette che si toccano, ma non nel medesimo piano; conterranno angoli uguali.

Siano due linee rette, che si toccano AB, BC, (*fig. 10*) parallele a due altre che si toccano DE, EF, ma non nel medesimo piano. Dico l'angolo ABC essere uguale all'angolo DEF.

Prendansi le BA, BC, ED, EF, fra loro uguali, e si giungano le AD, CF, BE, AC, DF. Perchè dunque la BA è uguale, e parallela alla ED, sarà ancora la AD uguale, e parallela alla BE (*prop. 33 I.*); e per la medesima ragione la CF sarà uguale, e parallela alla BE. Amendue dunque le AD, CF sono uguali, e parallele alla BE; e quelle, che sono parallele alla medesima linea retta, e non sono nel medesimo piano, nel quale è essa, saranno fra loro parallele (*prop. antec.*): onde la AD è parallela alla CF; ed è uguale: ed AC DF le congiungono: adunque la AC è uguale, e parallela alla DF (*prop. 33 I.*). Perchè due linee rette AB, BC sono uguali a due DE, EF, e la base AC è uguale alla base DF, sarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF (*prop. 8 I.*).

Se dunque due linee rette, che si toccano sono parallele a due altre ec. C. B. D.

PROB. I. PROP. XI.

Da un dato punto sublime tirare una linea retta perpendicolare al sottoposto piano.

Sia il dato punto sublime A (*fig. 11*); e sia dato il sottoposto piano. Bisogna dal punto A tirare una linea retta perpendicolare al sottoposto piano.

Si tiri nel sottoposto piano una linea retta comun-

que BC, e dal punto A alla BC, si tiri la perpendicolare AD (*prop.12 I.*). Se la AD sia perpendicolare ancora al sottoposto piano, sarà fatto ciò, che si proponeva: ma se non sia, si meni dal punto D la DE perpendicolare alla BC nel sottoposto piano (*prop.11 I.*), e dal punto A alla DE si tiri la perpendicolare AF, e finalmente per F si conduca la GH parallela alla BC (*prop. 31 I.*). E perchè la BC è perpendicolare ad amendue le DA, DE, sarà ancora la BC perpendicolare al piano che passa per ED, DA (*prop.4.XI*), ed è la GH parallela ad essa; e sono due linee rette parallele, l'una delle quali sia perpendicolare a qualche piano, l'altra ancora sarà al medesimo piano perpendicolare (*prop. 8 XI.*): onde ancora la GH è perpendicolare al piano, che passa per le ED, DA: e però è perpendicolare a tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano, la toccano; ed AF che è nel piano, che passa per le ED, DA la tocca: adunque la GH è perpendicolare alla FA; e perciò la FA è perpendicolare alla GH; ed è la AF perpendicolare alla DE. Adunque la AF è perpendicolare ad ambo le HG, DE: e se una retta linea è perpendicolare a due line rette, che si segano fra loro nella comun sezione, sarà ancora perpendicolare al piano, che passa per esse: laonde FA è perpendicolare al piano che passa per ED, GH (*prop. 4 XI.*): ma il piano per le ED, GH è sottoposto piano: adunque la AF al sottoposto piano è perpendicolare. Perciò da un punto sublime dato A si è tirata una linea retta AF perpendicolare al sottoposto piano C.B.F.

PROB. II. PROP. XII.

Dal punto, che sia in un piano dato, costituire una linea retta perpendicolare ad esso piano.

Sia il dato piano sottoposto GH (*fig. 12*), ed un punto che è in esso sia A. Bisogna dal punto A costituire una linea retta perpendicolare al sottoposto piano.

Intendasi qualche punto sublime B, dal quale si tiri la BC perpendicolare al sottoposto piano (*prop. antec.*), e per A si tiri AD parallela alla BC. Perchè dunque due linee rette sono parallele AD, CB, ed una di esse BC è perpendicolare al sottoposto piano; ancor la rimanente AD sarà perpendicolare al sottoposto piano (*prop. 8 XI.*).

Laonde dal punto che è in un piano dato si è costituita una linea retta perpendicolare al detto piano ec. C. B. F.

TEOR. XI. PROP. XIII.

Dal punto, che sia in un piano dato non si costituiranno due linee rette perpendicolari al detto piano dalla medesima parte.

Se è possibile dal punto A (*fig. 13*); che è nel dato piano costituiscansi due linee rette AB, AC dalla medesima parte perpendicolari ad esso: e si tiri un piano per le BA, AC; che farà la sezione per lo punto A nel sottoposto piano una linea retta (*prop. 3 XI.*); faccia la DAE.

Adunque le linee rette AB, AC, DAE sono in un piano. E perchè la CA è al sottoposto piano perpendicolare, sarà perpendicolare a tutte le linee rette, che essendo nel medesimo piano, la toccano (*def. 3*): ma DAE la tocca, che è nel sottoposto piano. Onde l'angolo CAE è retto, per la medesima ragione è retto BAE: l'angolo dunque CAE è uguale a BAE, e sono in un piano, che non è possibile.

Laonde dal punto, che sia in un dato piano, non si constituiranno ec. C. B. D.

TEOR. XII. PROP. XIV.

Quei piani sono paralleli fra loro, ai quali la medesima linea retta è perpendicolare.

Sia la linea retta AB (*fig. 14*) perpendicolare all'uno, e l'altro piano CD, EF. Dico detti piani essere paralleli.

Se non è così, prolungati si congiungeranno insieme: congiungansi, e facciano la comune sezione la linea retta GH (*prop. 3 XI.*); ed in essa GH preso qual si voglia punto K, si congiungano AK, BK. Perchè dunque la AB è perpendicolare al piano EF, sarà perpendicolare alla BK (*def. 3*), la quale giace nel piano EF prolungato: onde l'angolo ABK è retto: similmente BAK è retto, e del triangolo ABK due angoli ABK, BAK sono uguali a due retti, che non è possibile. Adunque i piani CD, EF prolungati non si congiungeranno, e però è necessario che CD, EF siano paralleli.

Laonde quei piani sono paralleli fra loro ec. C.B.D.

TEOR. XIII. PROP. XV.

Se due linee rette che si toccano siano parallele a due altre linee che si toccano, ma non nel medesimo piano; anche i piani che passano per esse linee rette saranno paralleli fra loro.

Due linee rette che si toccano AB, BC *(fig. 15)* siano patallele a due altre, che si toccano DE, EF e non nel medesimo piano. Dico i piani che passano per le AB, BC, DE, EF se si prolunghino non convenire insieme.

Si tiri dal punto B al piano, che passa per le DE, EF la perpendicolare BG, che tocchi il piano nel punto G, e per G tirisi la GH parallela alla ED, e GK parallela alla EF. Perchè dunque la BG è perpendicolare al piano, che passa per le DE, EF; sarà ancora perpendicolare a tutte le linee rette che la toccano; e sono nel medesimo piano *(def. 3)*; ed amendue GH, GK, che sono nel medesimo piano, la toccano. Adunque l' uno, e l' altro angolo BGH, BGK è retto. E perchè la BA è parallela alla GH, gli angoli GBA, BGH sono uguali a due retti *(prop. 29 I.)*; e BGH è retto: adunque anche GBA sarà retto; e però la GB è perpendicolare alla BA. Per la medesima ragione la GB è perpendicolare alla BC: essendo dunque la BG perpendicolare alle due linee rette BA, BC, che si segano fra loro, è perciò la BG perpendicolare al piano che passa per le AB, BC. Similmente la BG è perpendicolare al piano per le HG, GK *(prop. 4 XI.)*; ma il piano per le HG, GK, è quello,

che passa per le DE, EF: onde la BG è perpendicolare al piano, che passa per le DE, EF. E si è dimostrata anche BG perpendicolare al piano per le AB, BC; ed è perpendicolare al piano per DE, EF. Adunque la BG è perpendicolare ad amendue i piani, che passano per le AB, BC, DE, EF; ma quei piani sono paralleli ai quali la medesima linea retta è perpendicolare. È dunque il piano per le AB, BC parallelo al piano per le DE, EF.

E perciò se due linee rette che si tocchino ec. C. B. D.

TEOR. XIV. PROP. XVI.

Se due piani paralleli siano segati da qualche piano, le comuni sezioni loro saranno parallele.

Due piani paralleli AB, CD (*fig.* 16) siano segati da qualche piano FEGH, e le loro comuni sezioni siano EF, GH. Dico la EF essere parallela alla GH.

Imperocchè se non è parallela, prolungate le EF, GH si congiungeranno verso le parti F, H, o verso le parti E, G: si prolunghino prima verso le F, H, e congiungansi nel punto K. Perchè dunque la EFK è nel piano AB, e tutt'i punti, che si prendono nella EFK saranno nel medesimo piano: ma il punto K è uno di quelli: adunque K è nel piano AB, e per la medesima ragione K è nel piano CD. Adunque quei piani AB, CD prolungati si congiungeranno insieme: ma non si congiungono, essendosi posti paralleli; adunque le linee rette EF, GH prolun-

gate non si congiungeranno verso le parti F, H: similmente dimostreremo, se si prolunghino, non congiungersi verso le parti E, G: e quelle linee rette, che da niuna parte si congiungono, sono parallele: onde la EF è parallela alla GH.

Se dunque due piani paralleli siano segati da qualche piano ec. C. B. D.

TEOR. XV. PROP. XVII.

Se due linee rette siano segate da piani paralleli, saranno segate proporzionalmente.

Due linee rette AB, CD (*fig. 17*) siano segate da piani paralleli GH, KL, MN ne' punti A, E, B, C, F, D. Dico come la linea retta AE alla retta EB, così essere la CF, alla FD.

Si congiungano AC, BD, AD, ed AD incontri il piano KL nel punto X, e si uniscano EX, XF. Perchè dunque due piani paralleli KL, MN sono segati dal piano EBDX, le comuni sezioni EX, BD sono parallele (*prop. antec.*). Similmente perchè due piani paralleli GH, KL sono segati dal piano AEFC, le comuni sezioni loro AC, FX sono parallele. E perchè ad un lato del triangolo ABD, cioè a BD si è condotta la parallela EX, come AE ad EB, così sarà AX ad XD. Inoltre perchè ad un lato del triangolo ADC, cioè ad AC si è tirata la XF parallela, sarà (*prop. 2 VI.*) come la AX alla XD, così la CF alla FD; e si è dimostrato come la AX alla XD, così essere la AE alla EB: come dunque AE EB, così è CF ad FD (*prop. 11 V.*).

Onde se due linee rette siano segate da piani paralleli ec. C. B. D.

TEOR. XVI. PROP. XVIII.

Se una linea retta sia perpendicolare a qualche piano, tutt'i piani, che passano per la detta linea saranno perpendicolari al medesimo piano.

Sia la linea retta AB (*fig. 18*) perpendicolare al sottoposto piano. Dico ancora tutt'i piani, che passano per la AB, essere perpendicolari al sottoposto piano.

Si prolunghi per la AB il piano DE, e sia del piano DE, e del sottoposto piano la comune sezione CE: e prendasi nella CE qual si voglia punto F, dal quale nel piano DE si tiri la FG perpendicolare alla CE. Perchè dunque la AB è perpendicolare al sottoposto piano, sarà ancora perpendicolare a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel medesimo piano (*def. 3*), e perciò è altresi perpendicolare alla CE: onde l'angolo ABF è retto: ma anche GFB è retto: adunque la AB è parallela alla FG; ed è la AB perpendicolare al sottoposto piano la FG dunque sarà perpendicolare al medesimo piano *(prop.8 XI.)*. Ma il piano è perpendicolare al piano, quando in un piano tirate le linee rette perpendicolari sopra la comune sezione de' piani, siano all'altro piano perpendicolari (*def. 4*); e la FG, che nel piano DE tirata perpendicolare alla comune sezione de'piani CE si è mostrata perpendicolare al sottoposto piano. Adunque il piano DE è perpendicolare al

sottoposto piano. Similmente si dimostreranno tutti i piani, che passano per la AB, esser perpendicolari al sottoposto piano.

Laonde se una linea retta sia perpendicolare a qualche piano ec. C. B. D.

TEOR. XVII. PROP. XIX.

Se due piani si segano ad angoli retti sopra qualche piano, anche la comune sezione loro sarà perpendicolare al medesimo piano.

Siano due piani AB, BC (*fig.19*); che si seghino ad angoli retti sopra il sottoposto piano, e la comune sezione sia BD. Dico la BD essere perpendicolare al sottoposto piano.

Non sia, se è possibile, la BD perpendicolare al sottoposto piano; e dal punto D tirisi nel piano AB la linea retta DE perpendicolare alla AD, e nel piano BC tirisi la DF perpendicolare alla CD. Perchè il piano AB è perpendicolare al sottoposto piano, ed alla comune sezione loro AD si é tirata ad angoli retti la DE nel piano AB, sarà la DE perpendicolare al sottoposto piano. Similmente dimostreremo la DF essere perpendicolare al sottoposto piano: onde dal medesimo punto D sono costituite due linee rette perpendicolari al sottoposto piano dalla medesima parte, il che é impossibile (*prop. 13 XI.*): dunque dal punto D non si costituiranno altre perpendicolari al sottoposto piano, fuorchè la DB, sezione comune de' piani AB, BC.

Adunque se due piani che si segano siano ad angoli retti ec. C. B. D.

TEOR. XVIII. PROP. XX.

Se un angolo solido sia contenuto da tre angoli piani, due di loro presi comunque, sono maggiori del rimanente.

L'angolo solido A (*fig.* 20) sia contenuto da tre angoli piani BAC, CAD, DAB. Dico degli angoli BAC, CAD, DAB due, presi comunque, essere maggiori del rimanente.

Imperocchè se gli angoli BAC, CAD, DAB siano fra loro uguali, è manifesto due essere maggiori del rimanente, presi in qualunque modo. Ma se non siano uguali, sia BAC maggiore, e nella linea retta AB, e nel punto A in essa constituiscasi nel piano, che passa per le BA, AC l'angolo BAE uguale all'angolo DAB (*prop.* 23 *I.*); e pongasi AE uguale ad AB, e per E tirata la BEC seghi le linee rette AB, AC ne' punti B, C; e si congiungano BD, DC. E perchè DA è uguale a AE, e la AB è comune, le due DA, AB sono uguali alle due BA, AE, e l'angolo DAB è uguale all'angolo BAE. Adunque la base DB è uguale alla base BE (*prop.* 8 *I.*). E perchè le due BD, DC sono maggiori della BC, delle quali DB si è dimostrata uguale a BE; sarà la rimanente DC maggiore della rimanente EC. Ed essendo DA uguale ad AE, ed AC comune, e la base DC maggiore della base EC; sarà l'angolo DAC maggiore dell'angolo EAC: si è dimostrato anche l'angolo DAB uguale all'angolo BAE. Onde gli angoli DAB, DAC sono maggiori dell'angolo BAC. Similmente dimostreremo, se si prenda-

no due altri angoli, quali si siano, quelli essere maggiori del rimanente.

Se dunque un angolo solido sia contenuto da tre angoli ec. C. B. D.

TEOR. XIX. PROP. XXI.

Ogni angolo solido è contenuto da angoli piani minori di quattro retti.

Sia l'angolo solido A (*fig.* 21) contenuto da angoli piani BAC, CAD, DAB. Dico gli angoli BAC, CAD, DAB essere minori di quattro retti.

Prendansi in ciascuna delle AB, AC, AD quali si vogliano punti B, C, D, e si congiungano BC, CD, DB. Perchè dunque l'angolo solido in B è contenuto da tre angoli CBA, ABD, CBD, due comunque presi sono maggiori del rimanente. Adunque gli angoli CBA, ABD sono maggiori dell'angolo CBD: e per la medesima ragione gli angoli BCA, ACD sono maggiori dell'angolo BCD, e gli angoli CDA, ADB sono maggiori dell'angolo CDB. Onde i sei angoli CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB sono maggiori dei tre angoli CBD, BCD CDB: ma i tre angoli CBD, BDC, DCB sono uguali a due retti. Adunque i sei angoli CBA, ABD, BCA, ACD, ADC, ADB sono maggiori di due retti; ed essendo i tre angoli di ciascun triangolo ABC, ACD, ADB uguali a due retti, saranno de' tre triangoli i nove angoli CBA, ACD, BAC, ACD, DAC, CDA, ADB, BDA, BAD uguali a sei retti; de' quali sei angoli ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA sono maggiori di due retti: a-

dunque i tre angoli rimanenti BAC, CAD, DAB, che contengono l' angolo solido saranno minori di quattro retti.

Laonde ogni angolo solido è contenuto da angoli ec. C. B. D.

TEOR. XX. PROP. XXII.

Se siano tre angoli piani, de' quali due siano maggiori del rimanente, presi in qual si voglia modo, e siano contenuti da linee rette uguali, è possibile, che da quelle linee, che congiungono esse linee rette sia constituito un triangolo.

Siano tre angoli piani ABC, DEF, GHK (*fig.22*), due de' quali siano maggiori del rimanente, presi in qualunque modo, cioè gli angoli ABC, DEF siano maggiori del rimanente GHK, e gli angoli DEF, GHK maggiori dell'angolo ABC, ed inoltre gli angoli GHK, ABC maggiori dell' angolo DEF, e siano uguali le linee rette AB, BC, DE, EF, GH, HK; e si congiungano AC, DF, GK. Dico essere possibile, che da linee rette uguali alle AC, DF, GK si constituisca un triangolo, cioè che due quali si vogliano delle AC, DF, GK siano maggiori della rimanente.

Se dunque gli angoli ABC, DEF, GHK siano fra loro uguali, è manifesto, che facendosi uguali AC, DF, GK, da linee uguali ad esse, si possa costituire un triangolo. Ma se no, gli angoli ABC, DEF, GHK siano disuguali, e l' angolo ABC sia maggiore dell' uno, e l' altro DEF, GHK: adunque anche la

linea retta AC è maggiore dell' una, e l'altra delle DF, GK (*prop.* 24 *I.*), ed è manifesto, che la AC insieme con una di esse DF, GK sia maggiore della rimanente. Dico eziandio le DF, GK essere maggiori della AC. Constituiscasi nella linea retta AB, e nel punto in essa B l'angolo ABL uguale all'angolo GHK (*prop.* 23 *I.*), e ad una delle AB, BC, DE, EF, GH, HK, pongasi uguale la BL, e si giungano AL, LC. Perchè dunque le due AB, BL sono uguali alle due GH, HK, l'una all'altra, contengono angoli uguali; sarà la base AL uguale alla base GK (*prop.* 4 *I.*). E perchè gli angoli DEF, GHK sono maggiori dell' angolo ABC, de quali l' angolo GHK è ugnale all' angolo ABL, sarà il rimanente DEF maggiore dell'angolo LBC. Ed esssendo le due LB, BC uguali alle due DE, EF, l'una all'altra, e l'angolo DEF maggiore dell'angolo LBC, la base DF sarà maggiore della base LC; si è dimostrato anche la GK uguale alla AL. Adunque le DF, GK sono maggiori delle AL, LC: ma le AL, LC sono maggiori della AC: adunque le DF, GK saranno molto maggiori della AC. Onde delle linee rette AC, DF, GK due sono maggiori della rimanente, prese in qualunque modo.

E però è possibile che con linee rette uguali alle AC, DF, GK si costituisca uu triangolo ec. C.B.D.

PROB. III. PROP. XXIII.

Costituire un' angolo solido da tre angoli piani, de' quali due siano maggiori del rimanente, presi in qualunque modo. Bisogna che i tre angoli siano minori di quattro retti.

Siano tre angoli piani dati ABC, DEF, GHK (*fig.23*), due dei quali, presi in qual si voglia modo, siano maggiori del rimanente, e siano li tre angoli minori, di quattro retti. Bisogna da angoli uguali agli ABC, DEF, GHK costituire un angolo solido.

Si tagliano le AB, BC, DE, EF, GH, HK, uguali, e si uniscano AC, DF, GK, È possibile dunque, che da linee uguali ad esse AC DF, GK si constitusca un triangolo (*prop. antec.*), onde constituiscasi LMN (*prop. 22 I.*) in modo, che AC sia uguale ad LM, DF ad MN, ed inoltre la GK alla LN, e descrivasi d' intorno al trangolo LMN (*prop. 5 IV.*) il cerchio LMN, e prendasi il centro di esso, che sarà o dentro al triangolo LMN, o in un lato di esso; o fuori. Sia prima dentro, e sia X, e giungansi LX, MX, NX. Dico la AB essere maggiore della LX.

Se non è così, la AB o sarà uguale alla LX, o minore: sia prima uguale. Perchè dunque AB è uguale alla LX, ed AB uguale a BC, sarà LX uguale alla BC: ma LX è uguale ad XM. Adunque le due AB, BC sono uguali alle due LX, XM, l' una all' altra, e la base AC, si pone uguale alla base LM. Onde l' angolo ABC è uguale all' angolo LXM (*prop. 8 I.*) Similmente l' angolo DEF è uguale all' angolo MXN; e l' angolo GHK all' angolo NXL: i tre angoli dunque ABC, DEF, GHK sono uguali a tre angoli LXM, MXN, NXL. Ma li tre LXM, MXN, NXL sono uguali a quattro retti (*corol. prop. 15 I*): dunque anche li tre ABC, DEF, GHK saranno uguali a quattro retti; ma si pongono minori di quattro retti, il che è impossibile. Non è dunque AB uguale ad LX. Dico anche la AB non essere minore di LX.

Imperocchè s'egli è possibile, sia minore, e pongasi XO uguale ad AB, ed XP uguale a BC, e si unisca OP. Perche dunque AB è uguale alla BC, anche la XO sarà uguale alla XP: dunque la rimanente OL è uguale alla rimanente PM: e però la LM è parallela alla PO (*prop.* 2 *VI.*), e 'l triangolo LMX equiangolo al triangolo OPX. È dunque come la XL alla LM, così la XO alla OP (*prop.* 4 *VI.*), e permutando come LX ad XO, così LM alla PO; e la LX è maggiore della OX. Adunque la LM è maggiore della OP: ma LM si è posta uguale alla AC. Onde anche la AC sarà maggiore della OP; ed essendo le due AB, BC uguali alle due OX, XP, e la base AC maggiore della base OP, sarà l'angolo ABC maggiore dell' angolo OXP (*prop.* 25 *I.*). Similmente dimostreremo l' angolo DEF essere maggiore dell' angolo MXN, e l'angolo GHK dell' angolo NXL. I tre angoli dunque ABC, DEF, GHK sono maggiori de' tre LXM, MXN, NXL: ma gli angoli ABC, DEF, GHK si pongono minori di quattro retti: adunque gli angoli LXM, MXL, NXL saranno molto minori di quattro retti, ma sono uguali (*prop.* 13 *I.*), che è impossibile. Non è dunque la AB minore della LX. e si è dimostrato non esser uguale: è necessario dunque che sia maggiore.

Constituiscasi nel punto X la XR perpendicolare al cerchio LMN (*prop.* 12 *XI.*), e pongasi il quadrato di RX uguale all' eccesso, nel quale il quadrato di AB supera il quadrato di LX (*Ved. Lem. seg.*), e si congiungano RL, RM, RN. Perchè dunque RX, è perpendicolare al piano del cerchio LMM, sarà ancora perpendicolare a ciascuna delle LX, MX, NX

(*def. 3. XI.*), e perchè la LX è uguale alla XM, ed è comune, e ad angoli retti la XR: sarà la base LR uguale alla base RM (*prop. 4. I.*), e per la medesima ragione la RN, è uguale ad amendue RL, RM. Adunque le tre linee rette RL, RM, RN sono fra loro uguali. E perchè il quadrato XR si pone uguale alle eccesso, onde il quadrato AB supera il quadrato di LX; sarà il quadrato di AB uguale ai quadrati delle LX, XR, e 'l quadrato di RL è uguale ai quadrati delle LX, XR, perciocchè l'angolo LXR é retto (*prop. 47. I.*): adunque il quadrato di AB sarà uguale al quadrato di RL; e perciò la AB é uguale alla RL: ma alla AB è uguale ciascuna delle BC, DE, FE, GH, HK, ed alla RL è uguale l'una, e l'altra delle RM, RN. Ciascuna dunque delle AB, BC, DE, EF, HK è uguale a ciascuna delle RL, RM, RN. Ed essendo le due LR, RM uguali alle due AB, BC, e ponendosi la base LM uguale alla base AC; sarà l' angolo LRM uguale all' angolo ABC (*prop. 8. I.*). Per la medesima ragione l' angolo MRN è uguale all' angolo DEF, e l' angolo LRN è uguale all' angolo GHK: adunque da tre angoli piani LRM, MRN, LRN, che sono uguali a tre dati ABC, DEF, GHK si è costituito l' angolo solido R, che é contenuto dagli angoli LRM, MRN. LRN.

Ma sia il centro del cerchio in un lato del triangolo, cioè in MN, che sia X, e giungasi XL. Dico la AB essere maggiore di LX.

Imperocchè se non sia così, o la AB è uguale ad LX, o minore di essa; sia prima uguale. Le due dunque AB, BC, cioè le DE, EF, sono uguali alle due MX, LX, cioè alla MN; ma la MN si pone uguale

alla DF: onde le DE, EF sono uguali alla DF, che non è possibile (*prop. 20. I.*). Dunque la AB non é eguale alla LX : similmente non è minore; perochè ne seguirebbe molto maggiormente l'impossibile. Onde la AB è maggiore della LX. E similmente se all'eccesso nel quale il qradrato di AB supera il quadrato LX, si ponga l'uguale, come il quadrato di RX, e la RX si costituisca perpendicolare al piano del cerchio, si farà il problema.

Ma sia il centro del cerchio fuori del triangolo LMN, che sia X, e si congiungano le LX, MX: NX. Dico ancora la AB essere maggiore della LX,

Poichè se non è così o è uguale, o minore: sia prima uguale. Adunque le due AB, BC, sono uguali alle MX; XL, l'una all'altra, e la base AC è uguale alla ML: dunque l'angolo ABC è uguale all'angolo MXL (*prop. 8. I.*); e similmente l'angolo GHK è uguale all'angolo LXN; e perciò tutto l'angolo MXN é uguale ai due ABC, GHK. Ma anche gli angoli ABC, GHK sono maggiori dell'angolo DEF: adunque anche l'angolo MXN è maggiore di esso DEF. E perchè le due DE, EF sono uguali alle due MX, XN, e la base DF è uguale alla base MN, sarà l'angolo MXN uguale all'angolo DEF (*prop. 8. I.*); e si é dimostrato maggiore, che è assundo, e perciò AB non è uguale ad LX: dimostreremo dipoi nè anche essere minore, onde è necessario, che sia maggiore; e se constituiamo similmente la XR ad angoli retti sopra 'l piano del cerchio; e la ponghiamo uguale al lato di quel quadrato, onde il quadcato della AB supera quello della LX, si farà il problema. Onde dico la AB non essere anche minore della LX.

Perciocchè sia minore; se può essere; ed alla AB, pongasi uguale la XO, ed alla BC uguale la XP, e si unisca OP. Perchè dunque AB è uguale BC, sarà anche XO uguale ad XP: dunque la rimanente OL è uguale alla rimanente PM: e perciò la LM è parallela alla PO, e'l triangolo LMX equiangolo al triangolo PXO. Onde come XL ad LM, così XO ad OP (*prop.2. VI.*), e permutando come LX, ad XO, così LM ad OP (*prop. 4. VI.*), ma la LX è maggio della XO: adunque la LM è maggiore della OP, e la LM è uguale alla AC. Onde anche la AC sarà maggiore, della OP. Perchè dunque le due AB, BC sono uguali alle due OX, XP, l'una all'altra, e la base AC è maggiore della base OP; sarà l'angolo ABC maggiore dell'angolo OXP (*prop.25 I.*). Similmente se si prenda XR uguale all'una, e l'altra delle XO, XP, e giungasi OR, dimostreremo l'angolo GHK maggiore dell'angolo OXR. Costituiscasi nella linea retta LX; e nel punto in essa X l'angolo LXS uguale all'angolo ABC (*prop. 23. I.*); ed all'angolo GHK uguale LXT; e pongasi l'una, e l'altra XS, XT uguale alla OX, e si congiungano OS, OT, ST. È perchè le due AB, BC sono uguali alle due OX, XS, e l'angolo ABC uguale all'angolo OXS, sarà la base AC, cioè LM uguale alla base OS (*prop.4. I.*), e per la medesima ragione LN è uguale ad OT. Ed essendo le due ML, LN uguali alle due OS, ST, e l'angolo MLN maggiore dell'angolo SOT, sarà ancora la base MN maggiore della base ST (*prop.24. I.*); ma MN è uguale alla DF: adunque eziandio la DF è maggiore della ST. Perche dunque le due DE, EF sono uguali alle due SX, XT, e la

base DF maggiore della base ST, sarà l'angolo DEF maggiore dell'angolo SXT (*prop.25.I.*); ma l'angolo SXT è uguale agli angoli ABC, GHK: adunque l'angolo DEF è maggiore degli angoli ABC, GHK, ma è minore, che non può essere.

Adunque si è constituito un'angolo solido di tre angoli piani ec. C. B. D.

LEMMA.

Date due rette disuguali, ritrovare la differenza de' quadrati loro.

Siano due linee rette AB, LX (*fig. 24*), AB maggiore, LX minore. Bisogna ritrovare una retta, il cui quadrato sia uguale alla differenza de' quadrati delle AB, LX.

Sulla linea retta AB maggiore descrivasi il semicerchio ACB, e dall'estremo A li si adatti la retta AC uguale alla LX (*prop. 1 IV.*), e si congiunga CB. Perchè l'angolo nel semicerchio è retto, sarà il triangolo ACB rettangolo in C. Adunque il quadrato di AB è uguale a' quadrati delle AC, CB. Laonde il quadrato di AB supera quello di AC, ovvero di LX del quadrato di CB. E prendendo RX uguale a CB, si avrà il quadrato di RX uguale all'eccesso del quadrato di AB sopra il quadrato di LX. C.B.F.

TEOR XXI. PROP. XXIV.

Se un solido sia contenuto da piani paralleli, i piani opposti di esso saranno, ed uguali, e parallelo grammi.

Il solido EB (*fig.* 25.) sia contenuto da piani paralleli AC, GF, AH, DF, FB, AE. Dico i piani di esso opposti essere, ed uguali, e parallelogrammi.

Imperocchè essendo due piani paralleli BG, CE segati dal piano AC, le comuni sezioni loro sono parallele. Adunque la AB è parallela alla CD (*prop.* 16. *XI.*). Inoltre perché due piani paralleli BF, AE sono segati dal piano AC, le comuni loro sezioni sono parallele, e però la AD è parallela alla BC; e si è dimostrata AB parallela a CD: onde AC sarà parallelogrammo. Similmente dimostreremo ciascuno di essi DF, FG, GB, BF AE essere parallelogrammo: si congiungano AH, DF. E perchè AB è parallela a DC, e BH ad CF: saranno le due AB, BH, che si toccano, parallele alle due DC, CF che si toccano, e non sono nel medesimo piano, onde conterranno uguali angoli (*prop.* 10 *XI*): l'angolo dunque ABH è uguale all' angolo DCF. E perchè le due AB, BH sono uguali alle due DC, CF e l'angolo ABH è uguale all' angolo DCF, sarà la base AH uguale alla base DF, e 'l triangolo ABH uguale al triangolo DCF (*prop.* 4 *I*). Ed essendo il parallelogrammo BG doppio del triangolo ABH (*prop.* 41 *I.*) e 'l parallelogrammo CE del triangolo DCF; sarà il parallelogrammo BG uguale al parallelogrammo CE. Non altrimenti dimostreremo il parallelogrammo AC essere uguale al parallelogrammo GF, e 'l parallelogrammo AE al parallelogrammo BF.

Se dunque un solido sia contenuto da piani paralleli ec. C. B. D.

*

TEOR. XXII. PROP. XXV.

Se un solido parallelepipedo, cioè contenuto da piani paralleli, sia segato da un piano parallelo ai piani opposti, sarà come la base alla base, così il solido al solido.

Il solido parallelepipedo AD (*fig. 26*) sia segato dal piano FG parallelo ai piani opposti RA, DH. Dico come la base AF alla base FH, così essere il solido FB al solido ED.

Si prolunghi AH dall'una, e dall'altra parte; e pongansi alla EH quante si vogliano uguali HM, MN, ed alla AE quante si vogliano uguali AK, KL, e si compiscano i parallelogrammi LO, AO, HX, MS, ed i solidi LP, KR, CI, IS. Perchè dunque le linee rette LK, KA, AE sono eguali fra loro, saranno parimenti uguali fra loro i parallelogrammi LO, OA, AF: e similmente saranno anche tra loro eguali i parallelogrammi LQ, KB, AG (*prop. 1 VI.*), ed anche i parallelogrammi LZ, KP, AR tra loro uguali, perciocchè sono opposti (*prop. antec.*): per la medesima ragione anche i parallelogrammi EC, HX, MS sono uguali fra loro, ed anche i parallelogrammi HG, HI, IN sono uguali fra loro, e così pure i parallelogrammi DH, IX, NT. Adunque tre piani de' solidi LP, KR, AY sono uguali a tre piani: ma tre piani sono uguali a tre piani opposti. Dunque i tre solidi LP, KR, AY saranno uguali fra loro, e per la stessa ragione anche i tre solidi ED, MD, MT sono uguali fra loro. Quante volte dunque la base LF è moltiplice delle base AF, tante volte il solido LY è moltiplice

del solido AY. Similmente quante volte la base FN è moltiplice della base HF, tante volte il solido NY è moltiplice del solido HY, e se la base LF è uguale alla base NF, anche il solido LY sarà uguale al solido NY, e se la base LF supera la base NF, anche il solido LY supererà il solido NY, e se minore, minore. Essendo dunque quattro grandezze, cioè due basi AF, FH, e due solidi AY, HY; e si sono presi gli ugualmente moltiplici della base AF, e del solido AY, cioè la base LF, e 'l solido LY, e della base HF, e del solido HY, cioè la base NF, e 'l solido NY, e si è dimostrato, che se la base LF supera la base NF, anche il solido LY superi il solido NY; e se uguale, uguale, e se minore minore. È dunque come la base AF alla base FH, così il solido AY al solido HY.

Laonde se un solido parallelepipedo sia segato ec. C. B. D.

PROB. IV. PROP. XXVI.

Nella data linea retta, e nel punto dato in essa costituire un' angolo solido uguale ad un' altro dato.

Sia la data linea retta AB (*fig. 27*), il punto dato in essa A, e l' angolo solido D, che sia contenuto da angoli piani EDC, EDF, FDC. Bisogna nella data linea retta AB, e nel punto dato in essa A constituire un' angolo solido uguale al dato D.

Prendasi nella linea retta DF qualunque punto F, dal quale si tiri la FG perpendicolare al piano,

che passa per le ED DC (*prop. 11 XI.*), ed incontri il piano nel punto G, e giungasi DG; e nella linea retta AB, e nel punto in essa A costituiscasi l'angolo BAL uguale all'angolo EDC (*prop. 23 I.*), ed all'angolo EDG costituiscasi uguale l'angolo BAK. Inoltre pongasi la AK uguale alla DG e dal punto K s'innalzi la KH perpendicolare al piano per BAL (*prop: 12 XI.*); e pongasi la KH uguale alla GF, e si unisca AH. Dico l'angolo solido A, che è contenuto dagli angoli BAL, BAH, HAL, essere uguale all'angolo solido D, contenuto dagli angoli EDC, EDF, FDC.

Prendansi linee rette uguali AB, DE, e si uniscano HB, KB, FE, GE. Perchè dunque la FG è perpendicolare al sottoposto piano; ed a tutte le linee rette, che la toccano, e sono nel sottoposto piano (*def. 3 XI.*) sarà perpendicolare. Onde l'uno, e l'altro angolo FGD, FGE è retto: e per la medesima ragione l'uno, e l'altro HKA, HKB è retto. E perchè le due KA, AB sono uguali alle due GD, DE, l'una all'altra, e contengono angoli uguali, sarà la base BK uguale alla base EG: è poi KH uguale a GF e contengono angoli retti. È dunque anche HB uguale ad FE (*prop. 4 I.*). Similmente perchè le due AK, KH sono uguali alle due DG, GF, e contengono angoli retti, sarà la base AH uguale alla base DF; ed è la AB uguale alla ED. Adunque le due HA, AB sono uguali alle due FD, DE, e la base HB è uguale alla base EF. Onde l'angolo BAH sarà uguale all'angolo EDF (*prop. 8 I.*). Per la medesima ragione l'angolo HAL è uguale all'angolo FDC: perciocchè se prendiamo le

AL, DC uguali, ed uniamo le KL, HL, GC, FC, essendo tutto BAL uguale a tutto EDC, de' quali BAK si pone uguale ad EDG; sarà il rimanente KAL uguale al rimanente GDC. E perchè le due KA, AL sono uguali alle due GD, DC, e contengono angoli uguali; sarà la base KL uguale alla base CG (*prop. 4 I.*); è poi la KH uguale alla GF: adunque le due LK, KH sono uguali alle due CG, GF; e contengono angoli retti: dunque la base HL è uguale alla base FC. Inoltre perchè le due HA, AL sono uguali alle due FD, DC, e la base HL è uguale alla base FC; sarà l'angolo HAL uguale all'angolo FDC (*prop.8 I.*); ed è l'angolo BAL uguale all'angolo EDC.

Adunque nella data linea retta, e nel punto ec. C. B. F.

PROB. V. PROP. XXVII.

Dalla linea retta data descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto ad un'altro dato.

Sia la linea retta AB (*fig. 28*), il dato solido parallelepipedo CD. Bisogna dalla linea retta AB descrivere un solido parallelepipedo simile, e similmente posto al dato solido parallelepipedo CD.

Constituiscasi nella linea retta AB, e nel punto dato in essa A un'angolo uguale all'angolo solido C (*prop. antec.*), il quale sia contenuto dagli angoli BAH, HAK, KAB, cosicchè l'angolo BAH sia uguale all'angolo ECF, l'angolo BAK all'angolo ECG, ed

anche l'angolo KAH uguale all'angolo GCF, e facciasi come EC, a CG, così BA ad AK; e come GC a CF, così KA ad AH (*prop. 12 VI.*): dunque per equalità come EC, a CF così sarà BA ad AH. Compiscasi il parallelogrammo BK, e 'l solido AL. Perchè dunque come EC è a CG, così BA, ad AK, e sono proporzionali i lati intorno agli angoli uguali ECG, BAK; sara il parallelogrammo KB simile al parallelogrammo GE (*def. 1 VI.*). Per la stessa ragione il parallelogrammo KH è simile al parallelogrammo GF, e 'l parallelogrammo HB al parallelogrammo FE. Sono dunque tre parallelogrammi del solido AL simili a tre parallelogrammi del solido CD. Ma i tre sono uguali, e simili ai tre parallelogrammi opposti (*prop. 24 XI.*): dunque tutto il solido AL sarà simile a tutto il solido CD.

Laonde dalla data linea retta AB si è descritto un solido parallelepipedo AL simile, e similmente posto al solido parallelepipedo CD. C. B. F.

TEOR. XXIII. PROP. XXVIII.

Se un solido parallelepipedo sia segato da un piano, che passi per li diametri dei piani opposti; sarà segato per metà.

Il solido parallelepipedo AB (*fig. 29*) sia segato dal piano CDEF per li diametri dei piani opposti, cioè CF DE. Dico il solido AB essere segato per metà dal piano CDEF.

Perchè il triangolo CGF è uguale al triangolo CBF, e 'l triangolo ADE al triangolo DEH, e 'l

parallelogrammo CA uguale al parallelogrammo BE, che gli è opposto, e 'l parallelogrammo GE uguale al parallelogrammo CH, sarà il prisma contenuto da due triangoli CGF, ADE, e da tre parallelogrammi GE, AC, CE uguale al prisma che è contenuto da due triangoli CFB, DHE, e da tre parallelogrammi CH, BE, CE; perocchè sono contenuti da piani, e di numero, e di grandezza uguali.

Adunque tutto il solido AB è segato per mezzo dal piano CDEF. C. B. D.

TEOR. XXIV. PROP. XXIX.

I solidi parallelepipedi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, dei quali i lati elevati siano nelle stesse linee rette, sono fra loro uguali.

Siano nella medesima base AB (*fig. 30*) i solidi parallelepipedi CM, CN, e della medesima altezza, de' quali i lati elevati AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK siano nelle stesse linee rette FN, DK. Dico il solido CM essere uguale al solido CN.

Perciocchè essendo amendue CH, CK parallelogrammi, sarà la CB uguale all' una, e l' altra delle DH, EK (*prop. 34 I.*): onde anche la DH è uguale alla EK; tolgasi la comune EH, la rimanente dunque DE è uguale alla rimanente HK, e perciò anche il triangolo DEC è uguale al triangolo HKB, e'l parallelogrammo DG è uguale al parallelogrammo HN; e per la medesima ragione il triangolo AFG è uguale al triangolo LMN; ed è il pa-

rallelogrammo CF uguale al parallelogrammo BM, e'l parallelogrammo CG al parallelogrammo BN (*prop.* 24 *XI.*), essendo opposti. Adunque anche il prisma contenuto da due triangoli AFG, DEC, e da tre parallelogrammi AD, DG, GC è uguale al prisma contenuto da due triangoli LMN, HBK, e da tre parallelogrammi BM, NH, BN: pongasi il solido comune, la cui base è il parallelogrammo AB, ed opposto ad esso GEHM: tutto dunque il solido parallelepipedo CM è uguale a tutto il solido parallelepipedo CN.

Laonde i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima base ec. C. B. D.

TEOR. XXV. PROP. XXX.

I solidi parallelepipedi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza, de' quali i lati elevati non siano nelle stesse linee rette, sono fra loro uguali.

Siano nella medesima base AB (*fig.* 31) i solidi parallelepipedi CM, CN, e della medesima altezza, de' quali i lati elevati AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK non stiano nelle stesse linee rette. Dico il solido CM essere uguale al solido CN.

Si prolunghino NK, DH, GE, FM, e concorrano fra loro nei punti R, X, e si prolunghino anche FM, GE ai punti O, P, e si uniscano AX, LO, CP, BR. Il solido CM, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso FDHM è uguale al solido CO, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso XPRO, per-

ciocchè sono nella medesima base ACBL, ed i loro lati elevati AF, AX, LM, LO, CD, CP, BH, BR sono nelle medesime linee rette FO, DR: ma il solido CO, la cui base è il parallelogrammo ACBL, ed opposto ad esso XPRO è uguale al solido CN, la cui base è il parallelogrammo ACBL, e l' opposto ad esso GEKN, essendo nella medesima base ACBL, ed i lati elevati loro AG, AX, CE, CP, LN, LO, BK, BR sono nelle medesime linee rette GP, NR: onde anche il solido CM sarà uguale al solido CN.

Adunque i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima base, e la medesima altezza ec. C. B. D.

TEOR. XXVI. PROP. XXXI.

I solidi parallelepipedi, che hanno le uguali basi, e la medesima altezza sono fra loro uguali.

Siano nelle uguali basi AB, CD (*fig. 32*) i solidi parallelepipedi AE, CF, e della medesima altezza. Dico il solido AE essere uguale al solido CF. Siano prima i loro lati elevati HK, BE, AG, LM, OP, DF, CZ, RS perpendicolari alle basi AB, CD, e l' angolo ALB sia disuguale all' angolo CRD, e si prolunghi la RT per diritto alla CR, e costituiscasi nella linea retta RT, e nel punto R in essa l' angolo TRY uguale all' angolo ALB (*prop. 23 I.*), e pongasi la RT uguale alla AL, ed RY uguale ad LB, ed al punto Y si tiri XY parallela alla RT; e si compia la base RX, ed il solido NT. Perchè dunque le due TR, RY sono uguali alle due AL,

LB; e contengono angoli uguali, sarà (*def. 1 VI.*) il parallelogrammo RX uguale, e simile al parallelogrommo HL. E perchè AL è anche uguale ad RT; ed LM ad RS, e contengono angoli uguali, il parallelogrammo ST sarà uguale a simile al parallelogrammo AM. Per la medesima ragione il parallelogrammo LE è uguale, e simile ad SY. Adunque tre parallelogrammi del solido AE sono uguali, e simili a tre parallelogrammi del solido SX: ma anche i tre opposti ai tre sono, ed uguali, e simili (*prop. 24 XI.*). Tutto dunque il solido parallelepipedo AE è uguale a tutto il solido parallelepipedo SX. Si prolunghino DR, XY, e convengono tra loro nel punto V, e per T si conduca TQ parallela alla DV, e si prolunghino le TQ, OD, e convengano in *l*; e si compiano i solidi RI, SQ. Adunque il solido SQ, la cui base è il parallelogrammo IS, e l'opposto ad esso VU è uguale al solido SX, la cui base è il parallelngrammo ST, e l'opposto ad esso NX; perciocchè sono nella medesima base TS, e nella medesima altezza, ed i loro lati elevati RV, RY, TQ, TX, *g*U, *gp*, SN, S*y* sono nelle medesime rette VX, *py*. Ma il solido SX è uguale al solido AE: adunque ancora il solido *g*V è uguale al solido AE. Inoltre perchè il parallelogrammo RYXT è uguale al parallelogrammo TRVQ, poichè trovasi nella stessa base RT, e fra le medesime linee parallele RT, VX; ma il parallelogrammo RYXT è uguale al parallelogrammo CD, essendo uguale anche all'istesso AB; ed il parallelogrammo VT è uguale al parallelogrammo CD, ed è un altro parallelogrammo DT, sarà dunque come la base CD alla

base DT, così VT, a DT stessa: e perchè il solido parallelepipedo CI è segato dal piano DS parallelo ai piani opposti; sarà (*prop. 25 XI.*) come la base CD alla base DT, così il solido CF al solido RI; similmente perchè il parallelepipedo VI vien diviso dal piano ST parallelo ai piani opposti, sarà come la base VT alla base DT, così il solido QS al solido RI: ma come la base CD alla base DT, così la base VT, alla stessa TD: come dunque il solido CF al solido RI, così il solido SQ al solido RI. Ed avendo amendue i solidi CF, QS la stessa ragione al solido RI, il solido CF sarà uguale al solido QS: ed il solido QS si è dimostrato uguale al solido AE. Adunque il solido AE sarà anche uguale al solido CF (*prop. 9 V.*).

Ma non siano i lati AG, HK, BE, LM, CN, OP, DF, RS perpendicolari alle basi AB, CD. Dico anche il solido AE essere uguale al solido CF.

Si abbassino dai punti K, E, M, G, P, F, S, N al sottoposto piano le perpendicolari KZ, ET, GY, MU, PX, FV, NQ, SI, le quali incontrino il piano nei punti Z, T, U; Y, V, X, Q, I, e si uniscano TZ, UY, ZY, TU, XQ, VI, XV QI; adunque il solido KU è uguale al solido PI; poichè sono nelle uguali basi KM, PS, e della medesima altezza, i cui lati elevati sono perpendicolari alle basi. Ma il solido KU è uguale al solido AE: e 'l solido PI è uguale al solido CF, perciocchè sono nella stessa base, e della stessa altezza, i cui lati elevati non sono nelle stesse linee rette (*prop. 30 XI.*): dunque anche il solido AE sarà uguale al solido CF.

Laonde i solidi perallelepipedi che sono nelle uguali basi ec. C. B. D.

TEOR. XXVII. PROP. XXXIII.

I solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza sono fra loro come le basi.

Siano i solidi parallelepipedi AB, CD (*fig. 33*), che abbiano la madesima altezza. Dico essere fra loro come le basi, cioè come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD.

Adattisi alla linea retta FG il parallelogrammo FH uguale al parallelogrammo AE, e dalla base FH; e della medesima altezza a CD, compiscasi il solido parallelepipedo GK: adunque il solido AB è uguale al solido GK; perciocchè sono nelle uguali basi AE, FH, e della medesima altezza. (*prop. antec.*). Onde perchè il solido parallelepipedo CK è segato dal piano DG parallelo agli opposti piani, sarà come la base HF alla base FC, così il solido DH al solido DC (*prop. 24 XI.*); ed è la base FH uguale alla base AE, e'l solido GK uguale al solido AB: adunque come la base AE alla base CF, così il solido AB al solido CD.

Laonde i solidi parallelepipedi, che hanno la medesima altezza ec. C. B. D.

TEOR. XXVIII. PROP. XXXIII.

I solidi parallelepipedi simili sono fra loro in triplicata ragione dei lati omologhi.

Siano i solidi parallelepipedi simili AB, CD (*fig. 34*), e 'l lato AE sia omologo al lato CF. Dico il solido AB al solido CD avere triplicata ragione del lato AE all'omologo CF.

Si distendano EK, EL, EM per diritto alle AE, GE, HE: ed alla CF pongasi uguale EK, ed alla FN uguale EL, e così alla FR uguale EM, e compiasi il parallelogrammo KL, ed il solido KO. Perchè dunque le due KE, EL sono uguali alle due CF, FN, e l'angolo KEL è uguale all'angolo CFN, essendo anche l'angolo AEG uguale a CFN per la similitudine de' solidi AB, CD: sarà anche il parallelogrammo KL simile al parallelogrammo CN, e per la stessa ragione il parallelogrammo KM è uguale, e simile al parallelogrammo CR, ed anche il parallelogrammo OE al parallelogrammo FD. Adunque tre parallelogrammi del solido KO sono uguali, e simili a' tre parallelogrammi del solido CD: ma i tre sono uguali, e simili ai tre opposti (*prop. 24 XI.*): onde tutto il solido KO è uguale, e simile e tutto il solido CD: compiscasi il parallelogrammo GK, e dalle basi GK, KL parallelogramme, e della medesima altezza, che AB, compiscansi i solidi AX, LP. E perchè per la somiglianza dei solidi AB, CD, come AE a CF, così è EG ad FN, ed EH ad FR, ed FC è uguale ad EK, ed FN ad EL, ed FR, ad EM: sarà come AE, ad EK, così GE, ad EL, ed HE, ad EM; ma come AE ad EK, così il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK; come GE ad EL, così il parallelogrammo GK al parallelogrammo KL (*prop. 1 VI.*), e come la HE alla EM, così il parallelogrammo PE, a

KM, come dunque il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK, così GK a KL, e PE a KM: ma come AG, e GK, così il solido AB al solido EX (*prop. antec.*), e come GK, a KL, così il solido XE al solido PL, e come PE a KM, così il solido PL al solido KO, come dunque il solido AB al solido EX, così EX a PL, e PL a KO. (*prop. 11 V.*). Ma se siano quattro grandezze continuamente proporzionali, la prima alla quarta ha triplicata ragione di quella, che ha alla seconda (*def. 11 V.*): dunque anche il solido AB, al solido KO ha triplicata ragione di quella, che ha AB, ed EX; ma come AB, ad EX, così è il parallelogrammo AG al parallelogrammo GK (*prop. antec.*), e la linea retta AE, ad EK, onde il solido AB al solido KO avrà triplicata ragione di quella che ha la AE, alla EK: è poi il solido KO uguale al solido CD, e la linea retta EK è uguale alla retta CF.

Adunque il solido AB al solido CD ha triplicata ragione di quella, che ha il lato omologo di essa AE al lato omologo CF. C. B. D.

COROLLARIO.

Da questo è chiaro, che se quattro linee rette siano proporzionali, come la prima alla quarta, così è il solido parallelepipedo, che si fa dalla prima al solido parallalepipedo fatto dalla seconda, simile, e similmente descritto, perciocchè la prima alla quarta ha triplicata ragione di quella che ha alla seconda.

Scol. **Che se i parallelepiprdi AB, DC siano solamente equiangoli, in tal caso il parallelepipedo AB**

starà al parallelepipedo CD in ragion composta dei loro lati intorno agli angoli uguali. Cioè in ragione composta di AE a CF, di GE ad NF, e di HE ad RF.

Imperocchè, fatta la stessa costruzione, il parallelepipedo AB è al parallelepipedo KO, ovvero all'uguale CD in ragion composta del parallelepipedo AB ad EX, di EX a PL, e di PL a KO; ma AB è ad EX come AG a GK (*prop. 32 XI.*), ovvero AE ad EK (*prop. 1 VI.*); ed EX, a PL come BE ad HL, ovvero come GE ad EL, e PL a KO, come HL ad EO, ovvero come HE ad EM. Dunque il parallelepipedo AB è al parallelepipedo KO ultimo, ovvero all'uguale DC in ragion composta di AE ad EK, di GE ad EL, di HE ad EM, cioè de' loro lati: ma EK, EL, EM pareggiano CF, FN, FR. Dunque il parallelepipedo AB è all' altro CD equiangolo ad esso in ragion composta de' lati intorno agli angoli uguali.

Scol. II. Da ciò segue il modo onde misurare la solidità del parallelepipedo. Poichè prese ne' tre lati dell' angolo solido A del parallelepipedo AB, che si supponga rettangolo, tre parti uguali, e uguali ad una certa unità assunta, come al palmo, al piede, ec. in virtù dello Scolio I il parallelepipedo AB è all' altro AQ, che è un cubo risultante da un palmo, o da un piede, ec. di lunghezza, di larghezza, e di profondità in ragion composta di AE ad 1, di EG ad 1, e di EH ad 1, la quale ragione composta nascendo dal moltiplicare le ragioni semplici: sarà AB all' altro AQ, che è l' unità cubica, uguale al prodotto delle AE, EG, EH. Vale a dire la solidità in

unità cubiche si ha moltiplicando tra loro i tre lati di un angolo solido del parallelepipedo, supposti perpendicolari fra loro, ovvero moltiplicando lo spazio del parallelogrammo base del solido per l'altezza, in palmi, piedi, ec. E si avrà pure la solidità del prisma moltiplicando lo spazio del triangolo, o del poligono base del prisma per l'altezza.

TEOR. XXIX. PROP. XXXIV.

Dei solidi parallelepipedi uguali le basi sono reciprocamente proporzionali alle altezze, ed i solidi parallelepipedi, dei quali le basi sono reciprocamente proporzionali alle altezze, sono uguali fra loro.

Siano i solidi parallelepipedi uguali AB, CD (*fig.* 35). Dico le basi loro essere reciprocamente proporzionali alle altezze, cioè come la base EH alla base NP, così essere l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB.

Siano prima i lati elevati AG, EF, LB, HK, CM, NX, OD, PR perpendicolari alle basi loro. Dico come la base EH alla base NP, così essere CM ad AG. Se dunque la base EH sia uguale alla base NP, ed è il solido AB uguale al solido CD; sarà anche CM uguale ad AG. Imperocchè se essendo le basi EH, NP uguali, non siano uguali le altezze AG, CM; nè anche il solido AB sarà uguale al solido CD, e si pone uguale: non è dunque l'altezza CM disuguale all'altezza AG. Onde è necessario che sia uguale: e perciò come la base EH alla base NP, così sarà

la CM alla AG. Dalle quali cose appare de' solidi parallelepipedi AB,CD le basi reciprocarsi colle altezze.

Ora la base EH non sia uguale alla base NP, ma la EH sia maggiore: ed è il solido AB uguale al solido CD: dunque la CM è maggiore della AG, altrimenti seguirebbe ancora essere inegualí i solidi AB, CD, che si pongono uguali. Laonde pongasi CT uguale alla AG, e dalla base NP, e dall'altezza CT compiscasi il solido parallelepipedo CV. Perchè dunque il solido AB è uguale al solido CD, ed è un altro solido VC, e le grandezze uguali serbano ad una stessa grandezza la medesima ragione (*prop. 7 V.*); sarà come il solido AB al solido CV, così il solido CD al solido CV: ma come il solido AB al solido CV, così è la basa EH alla base NP, perciocchè i solidi AB, CV sono ugualmente alti (*prop. 32 XI.*); e come il solido CD al solido CV, così la base MP alla base PT (*prop. 25 XI.*), e la linea retta MC alla CT (*prop. 1 VI.*): come dunque la base EH alla base NP, così la MC alla CT; e la CT è uguale alla AG. Adunque come la base EH alla base NP, così la MC alla AG. Onde le basi dei solidi parallelepipedi AG, CD si reciprocano colle altezze. Ma le basi dei solidi parallelepipedi AB, CD siano reciproche alle altezze, e sia come la base EH alla base MP, così l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB. Dico il solido AB essere uguale al solido CD. Siano pur anche i lati elevati perpendicolari alle basi, e la base EH sia uguale alla base NP; ed è come la base EH alla base NP, così l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB, sarà l'altezza del solido CD uguale

all' altezza del solido AB. Ma i solidi parallelepipedi, che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza sono uguali fra loro (*prop. 31 XI.*): adunque il solido AB è uguale al solido CD. Ma non sia la basa EH uguale alla base NP, e sia la EH maggiore: è dunque l' altezza del solido CD maggiore dell' altezza del solido AB, cioè la CM è maggiore della AG: pongasi ancora la CT uguale alla AG, e compiscasi similmente il solido CV. Onde perchè è come la base EH alla base NP, così la MC alla AG, e la AG è uguale alla CT. Sara come la base EH alla base NP, così MC a CT; ma come la base EH alla base NP, così il solido AB al solido CV, perciocchè i solidi AB, CV sono ugualmente alti, e come la MC alla CT, così la base MP alla base PT, e 'l solido CD al solido CV. Come dunque il solido AB, al solido CV, così il solido CD al solido CV; ed avendo amendue i solidi AB, CD la medesima ragione al solido CV, sarà il solido AB uguale al solido CD.

Non siano i lati elevati FE, BL GA, KH, XN, DO, MC, RP perpendicolari alle loro basi, e dai punti F, G, B, K, X, M, D, R ai piani delle basi EH, NP si tirino le perpendicolari, che tocchino i piani nei punti S, T, Y, V, Q, Z, I, U, e compiscansi i solidi FV, QR. Dico ancora così essendo i solido AB, CD uguali, che le basi siano reciproche alle altezze, cioè come la base EH alla base NP, così stia l' altezza del solido CD all' altezza del solido AB.

Perchè il solido AB è uguale al solido CD, ed al solido AB è uguale il solido BT, per essere nella medesima base FK, e della stessa altezza; de' quali i

lati elevati non sono nelle stesse linee rette, e 'l solido DC è uguale al solido DZ, che sono nella medesima base XR, e della medesima altezza, i lati elevati dei quali non sono nelle medesime linee rette, sarà anche il solido BT uguale al solido DZ (*prop.31 XI.*): ma degli uguali solidi parallelepipedi, le altezze dei quali sono perpendicolari alle basi, le basi sono reciproche alle altezze. È dunque come la base FK alla base XR, così l'altezza del solido DZ all'altezza del solido BT: ed è la base FK eguale alla base EH, e la base XR alla base NP. Laonde come la base EH alla base NP, così è l'altezza del solido DZ all'altezza del solido BT; perciocchè sono le medesime le altezze dei solidi DZ, BT, e così anche dei solidi DC, BA. Come dunque la base EH alla base NP, così è l'altezza del solido DC all'altezza del solido AB. E però le basi dei solidi parallelepipedi AB, CD sono reciproche alle altezze.

Inoltre le basi dei solidi parallelepipedi AB, CD siano reciproche alle altezze, e sia come la base EH alla base NP, così l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB. Dico il solido AB essere uguale al solido CD.

Perchè, fatte le medesime cose, come la base EH alla base NP, così l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB, e la base EH è uguale alla base FK, ed NP ad XR, sarà come la base FK alla base XR, così l'altezza del solido CD all'altezza del solido AB, e sono le medesime altezze dei solidi AB, CD, e BT, DZ. Come dunque la base FK alla base XR, così è l'altezza del solido DZ all'altezza del solido BT. Onde le basi dei solidi parallelepipedi BT,

DZ sono reciproche alle altezze. E quei solidi parallelepipedi, dei quali le altezze sono perpendicolari alle loro basi, e le basi sono reciproche alle altezze, sono fra loro uguali. Adunque il solido BT è uguale al solido DZ: ma il solido BT è uguale al solido BA, perchè sono nella medesima base FK, e della medesima altezza, i lati elevati dei quali non sono nelle medesime linee rette, e 'l solido DZ è uguale al solido DC, essendo nella stessa base XR, e della medesima altezza, e non nelle medesime linee rette. Adunque il solido AB è uguale al solido CD.

Laonde le basi dei solidi parallelepipedi ec. C.B.D.

TEOR. XXX. PROP. XXXV.

Se due angoli piani siano uguali, e ne' vertici loro siano costituite linee rette sublimi, che colle linee rette poste da principio contengono angoli uguali, l'uno all'altro: nelle sublimi poi siano presi quali si vogliano punti, e da quelli ai piani, nei quali sono i primi angoli, si tirino le perpendicolari, e da punti fatti dalle perpendicolari nei piani ai primi angoli si congiungano linee rette, conterranno le dette linee colle sublimi uguali angoli.

Siano due angoli rettilinei uguali BAC, EDF (*fig.* 36.), e da'punti A, D constituiscansi sublimi rette linee AG, MD, che con le linee rette poste da principio contengano angoli uguali, l'uno all'altro, cioè l'angolo MDE uguale all'angolo GAB, e l'angolo MDF uguale all'angolo GAC. E si prendano nelle

AG,DM, quali si vogliano punti G, M, da' quali si tirino le GL, MN perpendicolari ai piani per le BAC, EDF, che tocchino essi piani nei punti L, N, e giungansi le LA, ND. Dico l'angolo GAL essere uguale all'angolo MDN.

Pongasi AH uguale a DM, e per H tirisi HK parallela alla GL, e la GL é perpendicolare al piano per BAC. Adunque eziandio la HK sarà perpendicolare al piano per BAC. (*prop. 8 XI.*)

Si tirino da punti K, N alle linee rette AB, AC, DE, DF le perpendicolari KC, NF, KB, NE, e si uniscano HC, CB, MF, FE. Perchè dunque il quadrato della HA è uguale ai quadrati delle HK, KA (*prop. 47 I.*), ed al quadrato della KA sono uguali i quadrati delle KC, CA, sarà il quadrato della HA uguale ai quadrati delle HK, KC, CA; ed ai quadrati delle HK, KC è uguale il quadrato della HC. Il quadrato adunque della HA sarà uguale ai quadrati delle HC, CA, e però l'angolo HCA è retto (*prop. 48 I*), e per la medesima ragione l'angolo DFM è retto: onde l'angolo ACH è uguale all'angolo DFM, ed à l'angolo HAC uguale all'angolo MDF. Sono dunque due triangoli MDF, HAC, che hanno due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che sottende uno degli angoli uguali, cioè HA a DM. Onde avranno anche gli altri lati uguali agli altri lati, l'uno all'altro (*prop. 26. I.*), e sarà la AC uguale alla DF. Similmente dimostreremo la AB essere uguale alla DE. Si coniungano HB, ME. E poichè il quadrato della AH è uguale ai quadrati delle AK, KH, ed al quadrato della AK sono uguali i quadrati delle AB,

BK; saranno i quadrati delle AB, BK, KH uguali al quadrato della AH: ma ai quadrati delle BK, KH è uguale il quadrato della BH; perciochè l'angolo HKB è retto, essendo la HK perpendicolare al sottoposto piano. Il quadrato dunque della AH è uguale ai quadrati delle AB, BH, e però l'angolo ABH è retto (*prop. 48 I.*). Similmente l'angolo DEM è anche retto; è poi l'angolo BAH uguale all' angolo EDM, che così si pone, ed è la AH uguale alla DM: adunque anche la AB è uguale alla DE. Onde perchè la AC è uguale alla DF, e la AB alla DE; saranno le due CA, AB uguali alle due FD, DE. Ma l'angolo BAC è uguale all'angolo FDE, la base dunque BC è uguale alla base EF (*prop. 4 I*), e'l triangolo al triangolo, e gli altri angoli agli altri angoli: adunque l'angolo ACB è uguale all'angolo DFE; ed è il retto ACK uguale al retto DFN. Onde anche il rimanente BCK è uguale al rimanente EFN; e per la medesima ragione l'angolo CBK è uguale all'angolo FEN. Il perchè sono due triangoli BCK, EFN, che hanno due angoli uguali a due angoli, l'uno all'altro, ed un lato uguale ad un lato, che é fra gli angoli uguali, cioè BC ad FE. Adunque avranno gli altri lati uguali agli altri lati (*prop. 26 I*): è dunque la CK uguale alla FN, è poi AC uguale alla DF. Onde le due AC, CK sono uguali alla due DF, FN, e contengono angoli retti, la base dunque AK è uguale alla base DN (*prop. 4 I*). Ed essendo la AH uguale alla DM; sarà anche il quadrato che si fa dalla AH uguale al quadrato della DM. Ma al quadrato della AH sono uguali i quadrati delle AK, KH; perciochè l'angolo AKH è retto, ed al quadrato della DM sono uguali

i quadrati delle DN , NM , essendo l' angolo DNM retto : adunque i quadrati delle AK, KH sono uguali ai quadrati delle DN, NM, de'quali il quadrato della AK è uguale al quadrato della DN: adunque il rimanente quadrato della KH è uguale al rimanente della MN, e perciò la linea retta HK è uguale alla MN: e perchè le due HA, AK sono uguali alle due MD, DN, l'una all'altra, e la base HK si è dimostrata uguale alla base NM, sara l'angolo HAK uguale all' angolo MDN.

Laonde se siano due angoli piani uguali ec. C.B.D.

COROLLARIO.

Da questo è chiaro, che se due angoli piani rettilinei siano uguali, e da essi siano costituite linee rette sublimi uguali, che con linee rette poste da principio contengano uguali angoli, l'uno all'altro, le perpendicolari, che da esse si tirano ai piani nei quali sono i primi angoli, saranno uguali.

TEOR. XXXI. PROP. XXXVI.

Se tre linee rette siano proporzionali, il solido parallelepipedo fatto dalle tre linee sarà uguale a quello, che si fa dalla linea di mezzo, essendo equilatero, ed equiangolo all' altro.

Siano tre linee rette proporzionali A, B, C, (*fig. 37.*), e sia come la A alla B, così la B alla C. Dico il solido, che si fa dalle A, B, C, essere uguale al solido, che si fa dalla B, equilatero, ed equiangolo all' altro.

Espongasi l' angolo solido E contenuto da tre angoli piani DEG, GEF, FED, ed alla D pongasi uguale ciascuna delle DE, EG, EF, e compiscasi il solido parallelepipedo EK: pongasi la LM uguale alla A, e nella linea retta LM, e nel punto in essa L constituiscasi l'angolo contenuto dalli NLX, XLM MLN uguale all'angolo solido E, e pongasi alla B uguale la LX, ed alla C uguale la LN. Perchè dunque come A a B, così B a C, ed A è uguale ad LM, e B a ciascuna delle LX, EF, EG, ED, e C ad LN, sarà come LM ad EF; così DE ad LN, e d'intorno agli uguali angoli MLN, DEF si reciprocano i lati. Adunque il parallelogrammo MN è uguale al parallelogrammo DF. E perchè due angoli piani rettilinei sono uguali DEF, NLM, ed in essi si costituiscono linee rette sublimi LX, EG uguali fra loro, e che con linee rette poste da principio contengono gli angoli uguali, l'uno all'altro, saranno le perpendicolari, che si tirano dai punti G, X ai piani per le NLM, DEF uguali fra loro (*prop. antec.*). Adunque i solidi LH, EK sono della medesima altezza: que' parallelepipedi, che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza sono fra loro uguali: il solido dunque HL è uguale al solido EK, ed è il solido HL, che si fa dalle tre A,B,C, e'l solido EK quello, che si fa dalla B.

Laonde se tre linee rette siano proporzionali, il solido parallepipedo fatto dalle tre ec. C. B. D.

TEOR. XXXII. PROP. XXXVII.

Se quattro linee rette siano proporzionali; i so-

lidi parallepipedi, che si fanno da esse simili, e similmente descritti, saranno ancora proporzionali, e se i solidi parallelepipedi, che si fanno da esse simili, e similmente descritti siano proporzionali, le linee rette ancora saranno proporzionali.

Siano quattro linee rette proporzionali AB, CD, EF, GH (*fig.38.*), e sia come AB a CD, così EF, a GH, e descrivansi dalle AB, CD, EF, GH solidi parallelepipedi simili, e similmente posti KA, LC, ME, NG. Dico come KA ad LC, così essere ME ad NG.

Imperochè essendo il solido parallelepipedo KA simile ad LC, avrà KA ad LC triplicata ragione di quella, che ha la AB alla CD (*prop.33 XI.*). Per la medesima ragione il solido ME al solido NG avrà triplicata ragione di quella che ha la EF alla GH; ed è come AB a CD, così EF a GH. Come dunque AK ad LC, così ME ad NG.

Ma sia il solido AK al solido LC, così il solido ME al solido NG. Dico come la linea retta AB alla retta CD, così essere la retta EF alla retta GH.

Perciocchè avendo AK ad CL triplicata ragione di quella, che ha la AB alla CD, ed ME ad NG triplicata ragione di quella che ha la EF alla GH, e come AK ad LC, così è ME, ad NG; sarà come AB a CD, così EF GH.

Se dunque quattro linee rette siano proporzionali, ec. C. B. D.

TEOR. XXXIII. PROP. XXXVIII.

Se un piano sia perpendicolare ad un' altro piano, e da qualche punto di quelli, che sono in un piano all' altro piano sia tirata la perpendicolare, cadrà quella nella comune sezione di detti piani.

Sia il piano CD, (*fig. 39*) al piano AB perpendicolare, e la comune sezione loro sia AD, e nel piano CD prendasi qual punto si voglia E. Dico la perpendicolare, che dal punto E si tira al piano AB, cada nella AD.

Non così, ma se può essere cada fuori, come la EF; e tocchi il piano AB nel punto F, e da F alla DA nel piano AB si tiri la FG perpendicolare, la quale sarà perpendicolare al piano CD, e si congiunga EG. Perchè dunque la FG è perpendicolare al piano CD, e la linea retta EG, che è nel medesimo piano CD la tocca, sarà l' angolo FGE retto (*def. 3 XI.*): ma anche la EF è perpendicolare al piano AB: onde l' angolo EFG è retto; e del triangolo EFG due angoli sono uguali a due retti, che è assurdo (*prop. 17 I.*). Non cadrà dunque fuori della linea retta DA la perpendicolare tirata dal punto E al piano AB, e però è necessario che cada in essa AD.

Se dunque un piano sia perpendicolare ad un altro. ec. C. B. D.

TEOR. XXXIV. PROP. XXXIX.

Se in un solido parallelepipedo i lati de' piani opposti siano segati per metà, e per le sezioni si

tirino i piani, il comune segamento dei piani e'l diametro del solido parallelepipedo si segheranno per metà.

Nel solido parallelepipedo AF (*fig. 40*) i lati dei piani opposti CF, AH siano segati per mezzo ne' punti K, L, M, N, X, P, O, R, e per le sezioni si tirino i piani KN, XR, e la comune sezione de' piani sia YS, e'l diametro del solido parallelepipedo sia DG. Dico le YS, DG segarsi per metà, cioè la YT essere uguale alla TS, e la DT alla TG.

Si congiungano DY, YE, BS, SG. Perchè dunque la DX è parallela alla OE, gli angoli alterni DXY, YOE sono fra loro uguali (*prop. 29 I.*), e perchè la DX è uguale allo OE, e la XY alla YO, e contengono uguali angoli, sara la base DY uguale alla base YE (*prop. 4 I*), e'l triangolo DXY uguale al triangolo YOE, e gli altri angoli uguali agli altri angoli. Adunque l'angolo XYD è uguale all'angolo OYE, e però la DYE è linea retta (*prop. 14 I.*), e per la medesima ragione ancora è retta la BSG, ed è la BS uguale alla SG. E perchè la CA è uguale, e parallela alla DB, ed è uguale, e parallela alla EG, sarà ancora la DB alla EG uguale, e parallela (*prop. 9 XI.*), e le linee rette DE, BG le congiungono: è dunque la DE parallela alla BG (*prop. 33 I*), e si sono presi in amendue quali si vogliano punti D, Y, G, S, e si sono congiunte le DG, YS; onde le DG, YS sono in un piano (*prop. 7 XI.*). Ed essendo la DE parallela alla BG, sarà l'angolo EDT uguale all'angolo BGT; perciochè sono alterni, ed è l'angolo DTY uguale all'angolo GTS (*prop. 15 I*)

Adunque i due triangoli DTY, GTS hanno due angoli uguali a due angoli, ed un lato uguale ad un lato, che sottende uno degli angoli uguali, cioè DY a GS, che sono la metà delle DE, BG: avranno dunque gli altri angoli uguali agli altri angoli (*prop. 26 I.*). Onde la DT è uguale alla TG, e la YT alla TS.

E perciò se in un solido parallelepipedo i lati dei piani opposti siano segati per metà. ec. C. B. D.

TEOR. XXXV. PROP. XL.

Se siano due prismi ugualmenti alti, de' quali uno abbia un parallelogrammo per base, e l'altro un triangolo, e sia il parallelogrammo doppio del triangolo, tali prismi saranno fra loro uguali.

Siano i prismi ugualmente alti ABCDEF, GHKLMN, (*fig. 41*), ed uno abbia per base il parallelogrammo AF, e l'altro il triangolo GHK, e 'l parallelogrammo AF sia doppio del triangolo GHK. Dico il prisma ABCDEF essere uguale al prisma GHKLMN.

Compiscansi i solidi AX, GO. E perchè il parallelogrammo AF è doppio del triangolo GHK, ed anche il parallelogrammo HK é doppio del triangolo GHK, sarà il parallelogrammo AF uguale al parallelogrammo HK. Ma i solidi parallelepipedi, che sono nelle uguali basi, e della medesima altezza; sono fra loro uguali (*prop. 31 XI.*). Adunque il solido AX è uguale al solido GO, ed è il prisma ABCDEF la mettà del solido AX, e 'l prisma GHKLMN la mettà del solido GO: adunque il prisma ABCDEF è uguale al prisma GHKLMN.

Onde se siano due prismi ugualmente. ec. C. B. D.

FINE DEL LIBRO UNDECIMO.

DEGLI ELEMENTI

DI

EUCLIDE

LIBRO DUODECIMO

E DE' SOLIDI

LIBRO SECONDO.

TEOR. I. PROP. I.

I poligoni simili, che si descrivono ne' cerchi, sono fra loro come i quadrati de' diametri.

Siano i cerchi ABCDE, FGHKL (*fig. 42.*), ed in essi i poligoni simili ABCDE, FGHKL, ed i diametri de' cerchi siano BM, GN. Dico come il quadrato della BM al quadrato della GN, così essere il poligono ABCDE, al poligono FGHKL.

Si congiungano BE, AM, GL, FN. E perchè il poligono ABCDE è simile al poligono FGHKL, ancora l'angolo BAE è uguale all'angolo GFL, ed è come BA ad AE, così GF ad FL. Adunque sono due

triangoli BAE, GFL, che hanno un' angolo uguale ad un angolo, cioè l'angolo BAE all' angolo GFL, e d'intorno agli uguali angoli i lati proporzionali; onde il triangolo ABE è equiangolo al triangolo GFL, e però l'angolo AEB è uguale all' angolo FLG, ma l'angolo AEB é uguale all' angolo AMB, perciochè (*prop.* 21 *III.*) sono nella medesima circonferenza, e l'angolo FLG è uguale all' angolo FNG: adunque anche l'angolo AMB è uguale all' angolo FNG, ma l'angolo BAM retto è uguale al retto GFN. Onde il rimanente è uguale al rimanente: è dunque il triangolo AMB equiangolo al triangolo FGN, e perciò come la BM alla GN, così è la BA alla GF: ma la ragione del quadrato di BM al quadrato di GN è la duplicata di BA, a GF, e la duplicata di BA a GF è uguale alla ragione del poligono ABCDE al poligono FGHKL. Come dunque il quadrato della BM, al quadrato della GN, così il poligono ABCDE al poligono FGHKL.

Onde i poligoni simili, che si descrivono nei cerchi ec. C. B. D.

LEMMA.

Esposte due grandezze ineguali, se dalla maggiore si tolga più, che la mettà; e dal residuo si tolga anche un' altra parte maggiore della mettà; e ciò si faccia sempre: rimarrà finalmente una certa grandezza, che sarà minore della minore grandezza esposta.

Siano due grandezze ineguali AB, C (*fig.* 43), delle quali la maggiore sia AB. Dico se dalla AB si

tolga una parte maggiore della mettà, e da quello che rimane, di nuovo si tolga più della mettà, e ciò sempre si faccia, rimarrà finalmente una certa grandezza, che sarà minore di C.

Imperocchè C moltiplicata diverrà alla fine maggiore della AB: si moltiplichi, e sia DE il moltiplice di C, e maggiore della AB; e si divida la DE nelle parti DF, FG, GE uguali alla C: e dalla AB si tolga la BH maggiore della mettà; e dalla AH si tolga di nuovo la HK maggiore della mettà, e ciò sempre si faccia, finchè le parti che sono in AB uguaglino in numero le parti che sono nella DE: siano dunque le AK, KH, HB uguali al numero delle parti DF, FG, GE. E perchè DE è maggiore di AB, e si è tolta dalla DE la EG minore della mettà; e dalla AB la BH maggiore della mettà; sarà la rimanente GD maggiore della rimanente HA. Inoltre perchè GD è maggiore di HA, e dalla GD si è tolta la mettà GF, dalla HA poi la HK maggiore della mettà, la rimanente FD sarà maggiore della rimanente AK; ed è la FD eguale a C: dunque C è maggiore di AK: e perciò AK è minore di C.

Laonde dalla grandezza AB è rimasta una grandezza AK minore della proposta C minore. C. B. D.

TEOR. II. PROP. II.

I cerchi sono fra loro come i quadrati de' diametri.

Siano i cerchi ABCD, EFGH, (*fig. 44*), ed i diametri loro siano BD, FH. Dico come il quadrato

di BD al quadrato di FH, così essere il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

Imperochè se non è così, sarà come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio o minore del cerchio EFGH, o maggiore. Sia prima al minore, che sia S; e nel cerchio EFGH descrivasi il quadrato EFGH, onde il quadrato descritto nel cerchio è maggiore della metà del cerchio EFGH, perchè se tiriamo per i punti E, F, G, H linee rette, che tocchino il cerchio, sarà il quadrato EFGH la metà del quadrato descritto d'intorno al cerchio; ma il cerchio è minore del quadrato descritto d'intorno ad esso: adunque il quadrato EFGH è maggiore della metà del cerchio EFGH. Seghinsi per metà le circonferenze EF, FG, GH, HE ne' punti K, L, M, N, e si congiungano EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Adunque ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà della porzione del cerchio nella quale egli consiste; perchè se tiriamo per li punti K, L, M, N linee rette, che tocchino il cerchio, e finiamo i parallelogrammi, che sono nelle linee rette EF, FG, GH, HE, sarà ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE la metà del parallelogrammo nel quale è descritto, ma la porzione è minore del parallelogrammo. Adunque ciascuno dei triangoli EKF, FLG, GMH, HNE è maggiore della metà della porzione del cerchio, nella quale consiste: adunque segando l'altre circonferenze per metà; e congiungendo le linee rette, e ciò facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cerchio, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cerchio EFGH supera lo

spazio S. Perocchè si è dimostrato nel Lemma precedente, che proposte due grandezze disuguali, se dalla maggiore si tolga più che la metà, e da quello che rimane similmente si tolga più che la metà, e questo si faccia sempre, rimarrà alla fine una certa grandezza, la quale sarà minore d'ogni minor grandezza proposta. Laonde siano lasciate le porzioni del cerchio EFGH, nelle linee rette EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, che siano minori dell'eccesso, nel quale il cerchio EFGH sorpassa lo spazio S: dunque il rimanente poligono EKFLGMHN sarà maggiore dello spazio S. Descrivasi ancora nel cerchio ABCD il poligono AXBOCPDR simile al poligono EKFLGMHN. Adunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così è il poligono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN (*prop. antec.*): ma come il quadrato di BD al quadrato di FH, così è il cerchio ABCD allo spazio S. Adunque come il cerchio ABCD allo spazio S, così anche il poligono AXBOCPDR al poligono EKFLGMHN (*prop. 11 V.*), e permutando come il cerchio ABCD al poligono, che è in esso, così lo spazio S al poligono EKFLGMHN; ma il cerchio ABCD è maggiore del poligono che è in esso, onde ancora lo spazio S è maggiore del poligono EKFLGMHN: ma è minore, che è impossibile. Non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD a qualche spazio minore del cerchio EFGH. Similmente dimostreremo non essere come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD. Dico dunque nè anche essere come il qua-

drato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD a qualche spazio maggiore del cerchio EFGH.

Imperocchè s'egli è possibile, sia ad uno spazio maggiore T. Sarà dunque invertendo come il quadrato di FH al quadrato di BD, così lo spazio T al cerchio ABCD; ma come lo spazio T al cerchio ABCD, così il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD, come apparisce dalla proporzione di T al cerchio ABCD, così il cerchio EFGH al quarto spazio; il quale deve essere minore di ABCD, altrimenti se fosse uguale, o maggiore, anche T sarebbe uguale, o minore di EFGH (*prop. 14 V.*), contro l'ipotesi. Adunque come il quadrato di FH al quadrato di BD, così il cerchio EFGH a qualche spazio minore del cerchio ABCD, il che si è dimostrato impossibile. Non è dunque come il quadrato di BD al quadrato di FH, così il cerchio ABCD ad uno spazio maggiore del cerchio EFGH, e si è dimostrato essere nè anche al minore. Onde come il quadrato di BD al quadrato di FH così sarà il cerchio ABCD al cerchio EFGH.

Adunque i cerchi sono fra loro come i quadrati de' diametri ec. C. B. D.

Cor. I. Segue da ciò il metodo, onde di molti cerchi farne un solo, che li pareggi, il che si ottiene riducendo ad un sol quadrato i quadrati di tutti i diametri (*prop. 47. I.*), e descrivendo col lato di questo come diametro un cerchio, che sarà uguale a tutti presi insieme. E così se si voglia duplicare, triplicare, ed in generale moltiplicare un cerchio.

Cor. II. E volendo trovare un cerchio, che uguagli la differenza di due cerchi dati, basterà prendere la

differenza de' quadrati de' loro diametri (*Lem. prop. 23. XI*), e con tal diametro, descrivere il cerchio.

TEOR. III. PROP. III.

Ogni piramide, che ha la base triangolare si divide in due piramidi uguali, e simili fra loro, che hanno le basi triangolari, e simili alla tutta, ed in due prismi uguali, che sono maggiori della mettà di tutta la piramide.

Sia la piramide, la cui base sia il triangolo ABC (*fig. 45*), e'l vertice il punto D. Dico la piramide ABCD dividersi in due piramidi uguali, e simili fra loro, che hanno le basi triangolari, e simili alla tutta, ed in due prismi uguali, ed i prismi essere maggiori della mettà di tutta la piramide.

Si seghino le AB, BC, CA, AD, DB, DC per metà ne' punti E, F, G, H, K, L, e congiungansi EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. Perchè dunque la AE è uguale alla EB; e la AH alla HD, sarà la EH parallela alla DB (*prop. 2 IV.*), e per la medesima ragione la HK è parallela alla AB. E dunque HEBK parallelogrammo (*prop. 34 I.*): ondé la HK è uguale alla EB; ma la EB è uguale alla AE: adunque anche la AE sarà uguale alla HK; ed è la AH uguale HD. Onde le due AE, AH sono uguali alle due KH, HD, l'una all'altra, e l'angolo EAH uguale all'angolo KHD (*prop. 29 I.*). Adunque la base EH é uguale alla base KD (*prop. 4 I.*), e'l triangolo AEH è uguale, e simile al triangolo HKD: e per la medesima ragione il triangolo

AHG è uguale, e simile al triangolo HLD. E perchè le due linee rette che si toccano EH, HG sono parallele a due linee rette che si toccano KD, DL, ma non nel medesimo piano, conterranno angoli uguali (*prop. 10 XI.*): adunque l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL. Similmente perchè due linee rette EH, HG sono uguali alle due KD, DL, l'una, all'altra, e l'angolo EHG è uguale all'angolo KDL; sarà la base EG uguale alla base KL. È dunque uguale, e simile il triangolo EHG al triangolo KDL. Similmente il triangolo AEG è uguale, e simile al triangolo HKL. Onde la piramide, la cui base è il triangolo AEG, e'l vertice il punto H è uguale, e simile alla piramide, la cui base è il triangole HKL, e'l vertice il punto D. E perchè ad uno de' lati del triangolo ABD, cioè ad AB si è tirata la HK parallela; sarà il triangolo ADB equiangolo al triangolo DHK, ed hanno i lati proporzionali: è dunque il triangolo ADB simile al triangolo DHK. E per la medesima ragione il triangolo DBC simile al triangolo DKL, e'l triangolo ADC al triangolo DHL. Ed essendo due linee rette BA, AC che si toccano parallele alle due KH, HL giacenti in diverso piano, conterranno angoli uguali (*prop. 10 XI.*): onde l'angolo BAC è uguale all'angolo KHL, ed è come la BA alla AC, così la KH alla HL. Adunque il triangolo ABC è simile al triangolo HKL, e però la piramide la cui base è il triangolo ABC, e'l vertice il punto D è simile alla piramide, la cui base è il triangolo HKL, e'l vertice il punto D. Ma la piramide, la cui base è il triangolo HKL, e'l vertice il punto D si è dimostrata simile alla piramide, la cui base è il triangolo AEG, e'l vertice

il punto H. Onde la piramide, la cui base è il triangolo ABC, e 'l vertice il punto D è simile alla piramide, la cui base è il triangolo AEG, ed il vertice il punto H. Adunque amendue le piramidi AEGH, HKLD sono simili a tutta la piramide ABCD. E perchè la BF è uguale alla FC, sarà il parallelogrammo EBFG doppio del triangolo GFC. E perchè li due prismi sono ugualmente alti, l'uno dei quali ha per base il parallelogrammo, e l'altro il triangolo, ed è il parallelogrammo doppio del triangolo, saranno detti prismi uguali fra loro *(prop. 40 XI.)*. Adunque il prisma contenuto da due triangoli BKF, ed EHG, e da tre parallelogrammi EBFG, EBKH, KHFG è uguale al prisma contenuto da due triangoli GFC, HKL, e da tre parallelogrammi KFCL, LCGH, HKFG, ed è manifesto l'uno, e l'altro prisma, e quello, la cui base è il parallelogrammo EBGF, e la linea retta HK opposta ad esso, e quello la cui base è il triangolo GFC, e 'l triangolo KLH opposto ad esso essere maggiore dell'una, e l'altra piramide, le cui basi sono i triangoli AEG, HKL, e i vertici i punti H, D; percioochè se congiungiamo le linee rette EF, EK, il prisma la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta opposta ad esse HK è maggiore della piramide, la cui base è il triangolo EBF, e'l vertice il punto K, ma la piramide, la cui base è il triangolo EBF, e 'l vertice il punto K è uguale alla piramide la cui base è il triangolo AEG, e 'l vertice il punto H, per essere contenuto da uguali, e simili piani: onde il prisma, la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK opposta ad

esso è maggiore della piramide, la cui base è il triangolo AEG, e'l vertice il punto H, ed il prisma, la cui base è il parallelogrammo EBFG, e la linea retta HK opposta ad esso è uguale al prisma, la cui base è il triangolo GFC, ed opposto ad esso il triangolo HKL; e la piramide, la cui base è il triangolo AEG, e'l vertice il punto H è uguale alla piramide, la cui base è il triangolo HKL, e'l vertice il punto D: adunque i due prismi, dei quali si è detto, sono maggiori delle due dette piramidi, le basi delle quali sono i triangoli AEG, HKL, ed i vertici i punti H, D.

Laonde tutta la piramide, la cui base è il triangolo ABC, e 'l vertice il punto D è divisa in due piramidi uguali, e simili fra loro, e simili a tutta, ed in due prismi uguali, e sono i due prismi maggiori della metà di tutta la piramide C. B. D.

TEOR. IV. PROP. IV.

Se siano due piramidi ugualmente alte, che abbiano le basi triangolari, e l'una, e l'altra di esse si divida in due piramidi uguali, e simili a tutta, ed in due prismi uguali, e delle piramidi fatte l'una, e l'altra si divida nel medesimo modo; e ciò si faccia sempre, sarà come la base di una piramide alla base dell'altra, così ancora tutt'i prismi, che sono in una piramide a tutt'i prismi, che sono nell'altra, di numero eguali.

Siano due piramidi ugualmente alte, che abbiano le basi triangolari ABC, DEF (*fig. 46*), ed

i vertici siano i punti G, H, e l'una, e l'altra di esse dividasi in due piramidi fra loro uguali, e simili a tutta, ed in due prismi uguali, e delle piramidi fatte l'una, e l'altra s'intenda divisa nel medesimo modo, e questo si faccia sempre. Dico come la base ABC alla base DEF, così essere tutti i prismi, che sono nella piramide ABCG a tutt'i prismi, che sono nella piramide DEFM di numero uguali.

Imperocchè essendo BX uguale a XC, ed AL uguale ad LC; sarà la XL parallela alla AB, e'l triangolo ABC simile al triangolo LXC (*prop. 2 VI*), e per l'istessa ragione il triangolo DEF è simile al triangolo RQF. E perchè la BC è doppia della CX, e la EF doppia della FQ, come BC a CX, così sarà EF ad FQ: e dalle BC, CX sono descritti rettilinei simili, e similmente posti ABC, LXC; e dalle EF, FQ rettilinei DEF, RQF simili, e similmente posti. È dunque come il triangolo BAC al triangolo LXC, così il triangolo DEF al triangolo RQF, e permutando come il triangolo ABC al triangolo DEF, così il triangolo LXC al triangolo RQF. Ma come il triangolo LXC al triangolo RQF; così il prisma, la cui base è il triangolo LXC, ed opposto ad esso OMN al prisma, la cui base è il triangolo RQF, ed opposto ad esso STY. Come dunque il triangolo ABC al triangolo DEF, così il prisma, la cui base è il triangolo LXC, ed opposto ad esso OMN al prisma, la cui base è il triangolo RQF, ed ad esso opposto STY. E perchè due prismi, che sono nella piramide ABCG sono fra loro uguali, e fra loro uguali anche i prismi, che sono nella piramide DEFH; sarà come il pris-

ma, la cui base è il parallelegrammo KLXB, ed ad esso opposta la linea retta MO al prisma, la cui base è il triangolo LXC, ed opposto ad esso OMN, così il prisma, la cui base è il parallelogrammo EPRQ, ed ad esso opposta la la linea retta ST al prisma, la cui base è il triangolo RQF, ed opposto ad esso STY. Laonde componendo come i prismi KBXLMO, LXCMNO al prisma LXCMNO, così i prismi PEQRST, RQFSTY al prisma RQFSTY, e permutando, come i prismi KBXLOM, LXCOMN, ai prismi PEQRST, RQFSTY, così il prisma LXCMNO al prisma RQFSTY, e come il prisma LXCMNO al prisma RQFSTY, così si è dimostrata la base LXC alla base RQF, e la base ABC alla base DEF. Adunque come il triangolo ABC al triangolo DEF, così i due prismi, che sono nella piramide ABCG ai due prismi, che sono nella piramide DEFH. Similmente ancora, se dividiamo le piramidi fatte nel medesimo modo, come le OMNG, STYH, sarà come la base OMN alla base STY, così i due prismi, che sono nella piramide OMNG, a' due prismi, che sono nella piramide STYH: ma come la base OMN alla base STY, così é la base ABC alla base DEF. Come dunque la base ABC alla base DEF così i due prismi, che sono nella piramide ABCG, a' due prismi, che sono nella piramide DEFH, e li due prismi, che sono nella piramide OMNG, a' due prismi, che sono nella piramide STYH: e quattro, a quattro, lo stesso ancora si dimostrerà ne' prismi fatti per la divisione delle piramidi AKLO, e DPRS, e di tutti semplicemente di numero eguali.

Laonde se siano due piramidi ec. C. B. D.

TEOR. V. PROP. V.

Le piramidi che hanno la medesima altezza, e le basi triangolari, sono fra loro come le basi.

Siano le piramidi della medesima altezza, le cui basi siano i triangoli ABC, DEF (*fig. 47*); ed i vertici i punti G, H. Dico come la base ABC alla base DEF, così essere la piramide ABCG alla piramide DEFH.

Imperocchè se non è così, sarà come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG o ad un solido minore della piramide DEFH, o ad un maggiore. Sia prima ad un solido minore, che sia Z, e dividasi la piramide DEFH in due piramidi uguali fra loro, e simili a tutta, ed in due prismi ugnali. Sono dunque i due prismi maggiori della mettà di tutta la piramide (*prop. 3 XII.*), e le piramidi fatte dalla divisione similmente si dividano, e questo facciasi sempre, finchè siano prese alcune piramidi dalla piramide DEFH, che siano minori dell'eccesso; nel quale la piramide DEFH supera il solido Z. Prendansi dunque, e siano, per esempio, le piramidi DPRS, STYH: saranno i rimanenti prismi nella piramide DEFH maggiori del solido Z. Dividasi anche la piramide ABCG in altrettante parti, come nella piramide DEFH, onde come la ABC alla base DEF, così i prismi, che sono nella piramide ABCG a' prismi, che sono nella piramlde DEFH (*prop. antec.*); ma come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG al solido Z. Come dunque la piramide ABCG al solido Z, così i prismi, che sono nella

piramide ABCG ai prismi nella piramide DEFH, e permutando, come la piramide ABCG ai prismi che sono in essa, così il solido Z ai prismi, che sono nella piramide DEFH: ma la piramide ABCG è maggiore dei prismi, che sono in essa. Adunque anche il solido Z è maggiore dei prismi, che sono nella pisamide DEFH. Ma è minore, che è impossibile. Non è dunque come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG a qualche solido minoro della piramide DEFH.

Similmente dimostreremo non essere ancora come la base DEF alla base ABC, così la piramide DEFH a qualche solido minore della piramide ABCG. Dico dunque non essere come la base ABC, alla base DEF, così la piramide ABCG a qualche solido maggiore della piramide DEFH.

Perocchè sia ad un maggiore, se è possibile, cioè al solido I. Sarà invertendo, come la base DEF alla base ABC, così il solido I alla piramide ABCG: ma come il solido I alla piramide ABCG, così la piramide DEFH a qualche solido minore della piramide ABCG, come si è poco fa dimostrato. Come dunque la base DEF alla base ABC, così la piramide DEFH a qualche solido minore della piramide ABCG, il che è assurdo. Onde non è come la base ABC alla base DEF, così la piramide ABCG a qualche solido maggiore della piramide DEFH, e si è dimostrato non essere al minore. Come dunque la base ABC alla base DEF, così è la piramide ABCG alla piramide DEFH.

E perciò le piramidi, che hanno la medesima altezza ec. C. B. D.

TEOR. VI. PROP. VI.

Le piramidi, che hanno la medesima altezza, e le basi poligone sono fra loro come le basi.

Siano le piramidi, che hanno la medesima altezza, e le basi poligone ABCDE, FGHKL (*fig.* 48), ed i vertici i punti M, N, Dico come la base ABCDE alla base FGHKL, così esserè la piramide ABCDEM alla piramide FGHKLN.

Dividasi la base ABCDE in triangoli ABC, ACD, ADE, e la base FGHKL dividasi in triangoli FGH, FHK, FKL, ed in ciascun triangolo intendansi le piramidi così alte, come le piramidi da principio. Perchè dunque è come il triangolo ABC al triangolo ACD, così la piramide ABCM alla piramide ACDM, sarà componendo come il trapezio ABCD al triangolo ACD, così la piramide ABCDM, alla piramide ACDM; ma come il triangolo ACD al triangolo ADE, così la piramide ACDM alla piramide ADEM. Adunque per egualità come la base ABCD alla base ADE, così la piramide ABCDM alla piramide ADEM, e similmente componendo, come la base ABCDE alla base ADE, così la piramide ABCDEM alla piramide ADEM, e per la medesima ragione come la base FGHKL alla base FKL, così la piramide FGHKLN alla piramide FKLN. E perchè sono due piramidi ADEM, FKLN, che hanno le basi triangolari, ed hanno la medesima altezza, sarà come la base ADE alla base FKL, così la piramide ADEM alla piramide FKLN. Ed essendo come la base ABCDE alla base ADE, così la pira-

mide ABCDEM alla piramide ADEM; e come la base ADE alla base FKL, cosi la piramide ADEM alla piramide FKLN, sarà per egualità come la base ABCDE alla base FKL, così la piramide ABCDEM alla piramide FKLN; ma come la base FKL alla base FGHL, così era anche la piramide FKLN alla piramide FGHKLN. Onde di nuovo per egualità come la base ABCDE alla base FGHKL, così è la piramide ABCDEM alla piramide FGHKLN.

Adunque le piramidi, che hanno la medesima altezza ec. C. B. D.

TEOR. VII. PROP. VII.

Ogni prisma, che ha la base triangolare si divide in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari.

Sia il prisma, la cui base il triangolo ABC (*fig.* 49), e ad esso opposto il triangolo DEF. Dico il prisma ABCDEF dividersi in tre piramidi uguali fra loro, che hanno le basi triangolari.

Si congiungano BD, EC, CD. E perchè ABED è parallelogrammo, il di cui diametro BD, sarà il triangolo ABD uguale al triangolo EBD (*prop. 34 I*). Adunque la piramide, la cui base è il triangolo ABD, e'l vertice il punto C è uguale alla piramide la cui base è il triangolo EBD, e'l vertice il punto C (*prop.5 XII*); ma la piramide, la cui base è il triangolo EBD, e'l vertice il punto C è la medesima che la piramide, la cui base è il triangolo EBC, e'l vertice il punto D: poiché sono contenute da' medesimi

piani. Adunque anche la piramide, la cui base è il triangolo ABD, e 'l vertice il punto C è uguale alla piramide, la cui base il triangolo EBC, e 'l vertice il punto D. Similmente perchè FCBE è parallelogrammo, il cui diametro CE, sarà il triangolo ECF uguale al triangolo CBE. Onde anche la piramide, la cui base il triangolo BEC, e'l vertice il punto D, è uguale alla piramide, la cui base è il triangolo ECF, e 'l vertice il punto D; ma la piramide, la cui base è il triangolo BCE, e 'l vertice il punto D si è dimostrata uguale alla piramide, la cui base il triangolo ABD, e 'l vertice il punto C: e perciò anche la piramide la cui base è il triangolo CEF, e 'l vertice il punto D è uguale alla piramide, la cui base è il triangolo ABD; e 'l vertice il punto C. Adunque il prisma ABCDEF dividesi in tre piramidi uguali fra loro che hanno le basi triangolari. E perchè la piramide, la cui base è il triangolo ABD, e'l vertice il punto C è la medesima che la piramide, la cui base è il triangolo CAB, e 'l vertice il punto D, poichè sono contenute dai medesimi piani; ma la piramide, la cui base è il triangolo ABD, e 'l vertice il punto C si è dimostrata la terza parte del prisma, la cui base è il triangolo ABC, ed opposto ad esso il triangolo DEF, sarà la piramide la cui base è il triangolo ABC, e 'l vertice il punto D la terza parte del prisma, che ha la medesima base, cioè il triangolo ABC, ed opposto ad esso il triangolo DEF.

Laonde ogni prisma triangolare ec. C. B. D.

COROLLARIO.

Da questo è chiaro, che ogni piramide è la terza parte del prisma, che ha la medesima base, e la stessa altezza: perciochè quantunque la base del prisma abbia qualche altra figura rettilinea, e la medesima quella, che è opposta ad essa, si divide nondimeno in prismi che hanno le basi triangolari, e così quelle che le sono opposte.

Scol. Essendo la piramide la terza parte del prisma, si otterrà la solidità di essa in unità cubiche con moltiplicare la base di essa piramide per la terza parte dell'altezza.

TEOR. VIII. PROP. VIII.

Le piramidi simili, che hanno le basi triangolari sono in triplicata ragione di quella, che hanno i lati omologhi fra loro.

Siano le piramidi simili, e similmente poste, le cui basi siano i triangoli ABC, DEF (*fig.* 50), ed i vertici i punti G, H. Dico la piramide ABCD alla piramide DEFH avere ragione triplicata di quella, che ha la BC alla EF.

Compiscansi i solidi parallelepipedi BGML, EHPO, E perchè la piramide ABCG è simile alla piramide DEFH, sarà l'angolo ABC uguale all'angolo DEF, e l'angolo GBC uguale all'angolo HEF, e l'angolo ABG all'angolo DEH: ed è come AB a DE, così BC ad EF, e BG ad EH. Perchè dunque come AB DE, così BC ad EF, ed intorno agli uguali

angoli i lati sono proporzionali, sarà il parallelogrammo BM simile al parallelogrammo EP (*def. 1 VI.*), e per la medesima ragione il parallelogrammo BN è simile al parallelogrammo ER, e 'l parallelogrammo BK al parallelogrammo EX. Adunque i tre parallelogrammi BM, KB, BN sono simili ai tre EP, EX, ER; ma li tre MB, BK, BN ai tre opposti sono simili, ed uguali; ed i tre EP, EX, ER sono simili, ed uguali ai tre opposti. Onde i solidi BGML, EHPO sono contenuti da piani simili, e di numero uguali, e però il solido BGML è simile al solido EHPO (*def. 9. XI.*). Ma i simili solidi parallelepipedi sono in triplicata ragione de' lati omologhi. Adunque il solido BGML al solido EHPO ha triplicata ragione di quella che ha il lato omologo BC al lato omologo EF: ma come il solido BGML al solido EHPO, così la piramide ABCG alla piramide DEFH: perchè la piramide è la sesta parte del solido, essendo il prisma, che è la metà del solido parallelepipedo triplo della piramide. Onde anche la piramide ABCG alla piramide DEFH avrà triplicata ragione di quella che ha la BC alla EF.

Per la qual cosa le piramidi simili ec. C. B. D.

COROLLARIO.

Da questo appare le simili piramidi che hanno le basi poligone essere fra loro in ragione triplicata di quella, che hanno i loro lati omologhi: perciocchè divise dette piramidi in altre piramidi che hanno le basi triangolari, perchè i poligoni simili, che sono nelle basi si dividono in triangoli simili, ed uguali

di numero, ed omologhi a tutti, sarà come una piramide triangolare contenuta in una delle piramidi, che ha la base poligona ad un'altra piramide similmente triangolare contenuta nell'altra piramide, che ha la base poligona, così tutte le piramidi triangolari contenute in una di quelle, che hanno le basi poligone a tutte le piramidi triangolari contenute nell'altra piramide, che ha la base similmente poligona. Ma la piramide, che ha la base triangolare è alla piramide che ha la base triangolare in ragone triplicata di quella, che hanno i lati omologhi fra loro. La piramide dunque, che ha la base poligona alla piramide che ha similmente base poligona avrà ragione triplicata di quella che ha il lato omologo al lato omologo.

TEOR. IX. PROP. IX.

Delle piramidi uguali, che hanno le basi triangolari, le basi sono reciprocamente proporzionali all'altezze, e quelle piramidi, che hanno le basi triangolari, delle quali le basi siano reciproche all'altezze, sono uguali fra loro.

Siano le piramidi uguali, che abbiano le basi triangolari ABC, DEF (*fig. 51*), i vertici i punti G, H. Dico le basi delle piramidi ABCG, DEFH essere reciprocamente proporzionali alle altezze, e come la base ABC alla base DEF, così essere l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG.

Compiscansi i solidi parallelepipedi BGML, EHPO. E perchè la piramide ABCG è uguale alla piramide

DEFH, ed il solido BGML è sestuplo della piramide ABCG, ed il solido EHPO è sestuplo della piramide DEFH (*coroll. prop. 7. XI.*), sarà il solido BGML uguale al solido EHPO (*prop. 15 V.*), e le basi dei solidi parallellepipedi uguali sono reciproche alle altezze (*prop. 34. XI.*): come dunque la base BM alla base EP, così è l'altezza del solido EHPO all'altezza del solido BGML; ma come la base BM alla base EP, così il triangolo ABC al triangolo DEF: adunque come il triangolo ABC al triangolo DEF, così l'altezza del solido EHPO all' altezza del solido BGML (*prop. 15 V.*); ma l'altezza del solido EHPO è la medesima, che l'altezza della piramide DEFH; e l'altezza del solido BGML è la medesima, che l'altezza della piramide ABCG. E' dunque come la base ABC alla base DEF, così l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG. Onde le basi delle piramidi ABCG, DEFH sono reciproche alle altezze. Ma le basi delle piramidi ABCG, DEFH siano reciproche alle altezze; e sia come la base ABC alla base DEF, così l'altezza della piramide DEFH all' altezza della piramide ABCG. Dico la piramide ABCG essere uguale alla piramide DEFH.

Perciocchè fatta la medesima costruzione, come la base ABC alla base DEF, così è l'altezza della piramide DEFH all'altezza della piramide ABCG, e come la base ABC alla base DEF, così il parallelogrammo BM al parallelogramo EP: onde come il parallelogrammo BM al parallelogrammo EP, così sarà l'altezza della piramide DEFG all'altezza della piramide ABCG (*prop. 15 V.*); ma l'altezza della

*

piramide DEFH è la medesima, che l'altezza del solido parallelepipedo EHPO; e l'altezza della piramide ABCG è la medesima, che l'altezza del solido parallelepipedo BGML: è dunque come la base BM alla base EP, così l' altezza del solido parallelepipedo EHPO all'altezza del solido parallelepipedo BGML: e quei solidi parallelepipedi, le cui basi sono reciprocamente proporzionali alle altezze, sono uguali fra loro; adunque il solido parallelepipedo BGML è uguale al solido parallelepipedo EHPO, e la piramide ABCG è la sesta parte del solido BGML; e del solido EHPO parimenti è la sesta parte la piramide DEFH: onde la piramide ABCG, è uguale alla piramide DEFH.

E però delle piramidi uguali, che hanno le basi trangolari, le basi sono reciproche ec. C. B. D.

TEOR. X. PROP. X.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che ha la medesima base, e l'uguale altezza.

Abbia il cono la medesima base che il cilindro, cioè il cerchio ABCD (*fig. 52*), e l'altezza uguale. Dico il cono essere la terza parte del cilindro, cioè il cilindro esser triplo del cono.

Imperocchè se il cilindro non è triplo de' cono, o sarà maggiore del triplo, o minore. Sia prima maggiore del triplo; e descrivasi nel cerchio ABCD il quadrato ABCD. Adunque il quadrato ABCD è maggiore della metà del cerchio ABCD. E dal quadrato ACCD innalzisi un prisma così alto, come il

cilindro, il quale prisma sarà maggiore della metà del cilindro: perchè se d' intorno al cerchio ABCD si descriva un quadrato, sarà il quadrato inscritto la metà di quello, che è descritto d'intorno, e sono i solidi parallelepipedi dalle medesime basi eretti ugualmente alti, cioè essi prismi. Onde i prismi sono fra loro come le basi (*corol. prop. 7 XI.*): il prisma dunque innalzato sul quadrato ABCD è la metà del prisma sul quadrato che si descrive d'intorno al cerchio ABCD: ed è il cilindro minore del prisma elevato sul quadrato che si descrive d' intorno al cerchio ABCD. Il prisma dunque eretto sul quadrato ABCD, così alto come il cilindro, è maggiore della metà del cilindro. Seghinsi le circonferenze AB, BC, CD, DA per metà ne' punti E, F, G, H, e si congiungono AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Adunque ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DHA è maggiore della metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste, come si è dimostrato di sopra. Ergansi sopra ciascun triangolo AEB, BFC, CGD, DHA i prismi alti come il cilindro. Onde anche ciascuno dei prismi innalzati è maggiore della metà della porzione del cilindro, che è d' intorno ad esso; perchè se si tirino per i punti E, F, G, H le parallele alle AB, BC, CD, DA, e compiscansi in esse i parallelogrammi AB, BC, CD, DA dai quali si alzino i solidi parallelepipedi, così alti come il cilindro, saranno i prismi, che sono ne' triangoli AEB, BFC, CGD, DHA la metà di ciascuno dei solidi elevati, e sono le porzioni del cilindro minori dei solidi parallelepipedi alzati: adunque ancora i prismi, che sono nei

triangoli AEB, BFC, CGD, DHA sono maggiori della metà delle porzioni del cilindro, che sono in esse. Laonde segando per metà le altre circonferenze, e congiungendo le linee rette, e sopra ciascun triangolo innalzando prismi così alti, come il cilindro, e questo facendo sempre, alla fine lasceremo alcune porzioni del cilindro minori dell'eccesso, nel quale il cilindro supera il triplo del cono (*Lem.XII.*): lascinsi, e siano AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Adunque il rimanente prisma, la cui base è il poligono AEBFCGDH, e l'altezza medesima del cilindro è maggiore del triplo del cono; ma il prisma, la cui base è il poligono AEBFCGDH, e l'altezza medesima del cilindro (*corol. prop. 7 XII.*), è triplo della piramide, la cui base è il poligono AEBFCGDH, e'l vertice il medesimo punto che del cono: la piramide dunque, la cui base il poligono AEBFCGDH, e'l vertice medesimo del cono, è maggiore del cono che ha per base il cerchio ABCD: ma è minore, essendo compreso da esso, il che è impossibile. Onde non sarà il cilindro maggiore, che il triplo del cono. Dico inoltre nè anche essere minore che il triplo del cono. Perciocchè se è possibile sia il cilindro minore, che il triplo del cono: sarà invertendo il cono maggiore, che la terza parte del cilindro. Descrivasi nel cerchio ABCD il quadrato ABCD. Adunque il quadrato ABCD è maggiore della metà del cerchio ABCD, e sul quadrato ABCD si alzi una piramide, che abbia lo stesso vertice che il cono: la piramide dunque alzata sarà maggiore, che la metà del cono. Perocchè, come abbiamo dimostrato, se d'intorno al cerchio si descriva un quadrato, sarà

il quadrato ABCD la metà di quello, che è descritto d'intorno al cerchio, e se sui quadrati si alzino solidi parallepipedi così alti, come il cono, quali si chiamano anche prismi, sarà quello, che si alza sul quadrato ABCD la metà di quello che è innalzato sul quadrato descritto d'intorno al cerchio: perchè sono fra loro come le basi. Onde anche le terze parti di esse. La piramide dunque, la cui base è il quadrato ABCD è la metà di quella piramide, che si alza sul quadrato descritto d'intorno al cerchio: ma la piramide alzata sul quadrato descritto d'intorno al cerchio è maggiore del cono, perchè lo comprende. Adunque la piramide, la cui base è il quadrato ABCD, e 'l medesimo vertice che del cono è maggiore della metà del cono. Segbinsi le circonferenze AB, BC, CD, DA per metà nei punti E, F, G, H; e giungansi AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Adunque ciascuno dei triangoli AEB, BFC, CGD, DHA è maggiore della metà della porzione del cerchio ABCD, nella quale consiste: si elevino su ciascun triangolo AEB, BFC, CGD DHA le piramidi, che abbiano i medesimi vertici, che il cono. Ciascuna dunque delle piramidi alzate al medesimo modo è maggiore della metà della porzione del cono, che è d'intorno ad essa; laonde segando per mezzo le altre circonferenze, e giungendo le linee rette, e su ciascun triangolo alzando la piramide, che abbia il medesimo vertice che il cono, e questo facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni del cono, che saranno maggiori dell'eccesso, nel quale il cono supera la terza parte del cilindro: lascinsi, e siano quelle, che sono nelle AE, EB, BF, FC, CG, GD,

DH, HA. Adunque la rimanente piramide, la cui base è il poligono AEBFCGH, e 'l vertice stesso, che del cono è maggiore della terza parte del cilindro: ma la piramide, la cui base è il poligono AEBFCDH, e 'l vertice medesimo, che del cono, è la terza parte del prisma, la cui base è il poligono AEBFCDH, e la medesima altezza, che del cilindro. Onde il prisma, la cui base è il poligono AEBFCGH, e la medesima altezza del cilindro, è maggiore del cilindro, la cui base è il cerchio ABCD, ma è minore, perciocchè da esso è compreso, che non è possibile. Non è dunque il cilindro minore, che il triplo del cono, e si è dimostrato non essere maggiore, che il triplo: onde è necessario che il cilindro sia triplo del cono, e però il cono è la terza parte del cilindro.

Ogni cono dunque è la terza parte del cilindro, che ha ec. C. B. D.

Scolio. Questo stesso dimostrasi pe' coni, e cilindri scaleni. Dal che segue, che ogni cono o retto, o scaleno sia la terza parte del cilindro, o retto, o scaleno, che abbia la medesima base, e l'uguale altezza.

TEOR. XI. PROP. XI.

I coni, ed i cilindri, che hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi.

Siano i coni, ed i cilindri della medesima altezza, che abbiano per basi i cerchi ABCD, EFGH, (*fig. 53*), e gli assi KL, MN, ed i diametri delle basi

AC, EG. Dico come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così essere il cono AL al cono EN.

Se non è così, sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido minore del cono EN, o maggiore: sia prima al minore, che sia X, e di quanto è minore il solido X del con EN, tanto sia il solido I. Dunque il cono EN è uguale ai solidi X, I. Descrivasi nel cerchio EFGH il quadrato EFGH. Laonde il quadrato è maggiore delle metà del cerchio. Alzisi sul quadrato EFGH una piramide così alta, come il cono; la piramide dunque alzata è maggiore della metà del cono; perchè se descriviamo un quadrato d'intorno al cerchio, e da esso ergiamo una piramide alta come il cono, sarà la piramide descritta di dentro la metà della piramide descritta d'intorno; imperocchè sono tra loro come le basi: il cono circoscritto poi è minore della piramide. Adunque la piramide, la cui base è il quadrato EFGH, e il vertice medesimo, che del cono, è maggiore della metà del cono. Seghinsi le circonferenze EF, FG, GH, HE per mezzo ne' punti O, P, R, S, e giungansi OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH: ciascun triangolo dunque HOE, EPF, FRG, GSH è maggiore della metà della porzione del cerchio nella quale consiste: da ciascun triangolo dunque HOE, EPF, FRG, GSH s'innalzi una piramide alta come il cono. Adunque ciascuna delle piramidi erette è maggiore della metà della porzione del cono, che è in essa: laonde segando le altre circonferenze per metà, e giungendo le linee rette, ed alzando da ciascun triangolo piramidi alte, come il cono, e questo facendo sempre, lasceremo alla fine alcune porzioni

del cono, che saranno minori del solido I. Lascinsi, e siano quelle, che in esse HO, OE, EP, PF, FR, RG, GS, SH: adunque la rimanente piramide, la cui base è il poligono HOEPFRGS, e la medesima altezza, che del cono è maggiore del solido X. Descrivasi nel cerchio ABCD il poligono DTAYBQCV simile, e similmente posto al poligono HOEPFRGST, e da esso alzasi una piramide alta, come il cono AL. Perchè dunque come il quadrato di AC al quadrato della EG, così il poligono DTAYRQCV al poligono HOEPFRGS (*prop. 1. XII.*), e come il quadrato di AC al quadrato di EG, così il cerchio ABCD al cerchio EFGH (*prop. 2. XII.*), sarà come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il poligono DTAYBQCV al poligono HOEPFRGS, ma come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL al solido X, e come il poligono DTAYBQCV al poligono HOEPFRGS, così la piramide, la cui base è il poligono DTAYBQCV, e 'l vertice il punto L alla piramide, la cui base è il poligono HOEPFRGS, e 'l vertice il punto N. Come dunque il cono AL al solido X, così la piramide la cui base è il poligono DTAYBQCV, e 'l vertice il punto L alla piramide la cui base è il poligono HOEPFRGS, e 'l vertice il punto N. Onde permutando, come il cono AL alla piramide, che è in esso, così il solido X alla piramide, che è nel cono EN; ma il cono AL è maggiore della piramide che è in esso. Adunque il solido X è maggiore della piramide, che è nel cono EN: ma è minore, che è impossibile. Non è dunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL, ad un solido minore del cono EN.

Similmente si dimostrerà nè anche come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così essere il cono EN a qualche solido minore del cono AL. Dico inoltre non essere come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido maggiore del cono EN. Perciocchè s'egli è possibile, sia ad un solido maggiore, che sia Z; invertendo dunque come il cerchio EFGH al cerchio ABCD, sarà il solido Z al cono AL: ma come il solido Z al cono AL, così il cono EN, a qualche solido minore del cono AL; come dunque il cerchio EFGH al cerchio ABCD, così il cono EN a qualche solido minore del cono AL, che si è dimostrato impossibile. Onde non è come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così il cono AL a qualche solido maggiore del cono EN; e si è dimostrato non essere anche al minore. Adunque come il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così è il cono AL al cono EN. Ma come il cono al cono, così è il cilindro al cilindro, perciocchè l'uno è triplo dell'altro. Come dunque il cerchio ABCD al cerchio EFGH, così i cilindri, che sono in essi ugualmente alti ai coni.

Adunque i coni, ed i cilindri, che hanno la medesima altezza ec. C. B. D.

Scol. Questo stesso si dimostrerà nè coni, e cilindri scaleni.

TEOR. XII. PROP. XII.

I coni, ed i cilindri simili sono fra loro in triplicata ragione di quella, che hanno i diametri delle basi.

Siano i coni, ed i cilindri simili, le cui basi siano i cerchi ABCD, EFGH (*fig. 54*), ed i diametri delle basi BD, FH, e gli assi dei coni, o cilindri KL, MN. Dico il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L al cono, la cui base è il cerchio EFGH, e 'l vertice il punto N avere ragione triplicata di quella, che ha BD ad FH.

Perchè se il cono ABCDL al cono EFGHN non ha ragione triplicata di quella, che ha BD ad FH: avrà il cono ABCDL a qualche solido minore del cono EFGHN ragione triplicata, ovvero a maggiore: Abbia prima ad un minore, che sia X; e descrivasi nel cerchio EFGH il quadrato EFGH. Il quadrato dunque EFGH è maggiore della metà del cerchio EFGH, e si alzi sul quadrato EFGH una piramide così alta, che il cono. Adunque la piramide alzata è maggiore, che la metà del cono. Seghinsi le circonferenze EF, FG, GH, HE per metà ne' punti O, P, R, S, e giungansi EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Laonde ciascun triangolo EOF, EPG, GRH, HSE è maggiore della metà della porzione del cerchio EFGH, nella quale consiste: ed alzisi sopra ciascun triangolo EOF, EPG, GRH, HSE una piramide, che abbia il medesimo vertice, che il cono. Adunque ciascuna delle piramidi alzate è maggiore della metà della porzione del cono, che è

d'intorno ad essa, e perciò segando le altre circonferenze per metà, e congiungendo le linee rette, e su ciascuno de' triangoli innalzando le piramidi, che abbiano il medesimo vertice, che il cono, e questo facendo sempre, si lasceranno alla fine alcune porzioni del cono, che saranno minori dell'eccesso, nel quale il cono EFGHN avanza il solido X. Lascinsi, e siano quelle, che sono nelle EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE; onde la piramide rimanente, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e'l vertice ed il punto N è maggiore del solido X. Descrivasi ancora nel cerchio ABCD il poligono ATBYCVDQ simile, e similmente posto al poligono EOFPGRHS, sul quale alzisi una piramide, che abbia lo stesso vertice che il cono, e de' triangoli che contengono la piramide, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e'l vertice il punto L, uno sia LBT, e dei triangoli, che contengono la piramide, la cui base è il poligono EOFGRHS, e'l vertice il punto N, sia uno NFO, e giungansi KT, MO. Perchè dunque il cono ABCD è simile al cono EFGG, sarà come BD ad FH, così l'asse KL all'asse MN, ma come BD ad FH, così BK ad FM: adunque come BK ad FM, così KL ad MN; e permutando come BK a KL, così FM, ad MN, l'una, e l'altra è perpendicolare, e d'intorno agli uguali angoli BKL, FMN sono i lati proporzionali. È dunque il triangolo BKL simile al triangolo FMN; e similmente perchè come BK a KT, così è FM ad MO, e d'intorno agli uguali angoli BKT, FMO sono i lati proporzionali, imperocchè qual parte è l'angolo BKT di quattro retti, che sono al centro K, la medesima parte di quattro

retti, che sono al centro M è l'angolo FMO, sarà il triangolo BKT simile al triangolo FMO. E poichè si è dimostrato come BK a KL, così FM ad MN, e BK è uguale a KT, ed FM ad MO, sarà come TK a KL, così OM ad MN, ed intorno agli uguali angoli TKL, OMN, essendo retti, sono i lati proporzionali, il triangolo dunque LKT è simile al triangolo MNO, e per la similitudine dei triangoli BKL, FMN, essendo come LB a BK, così NF ad FM. E per la similitudine dei triangoli BKT, FMO, come BK a BT, così MF ad FO: sarà per egualità come LB a BT, così NF ad FO: inoltre per la similitudine dei triangoli LTK, NOM, essendo come LT a TK, così NO ad OM, e per la similitudine de' triangoli LTK, NOM, essendo come LT a TK, così NO ad OM, e per la similitudine dei triangoli KBT, OMF, come KT a TB, così MO ad OF, sarà per egualità come LT a TB, così NO ad OF, e si è dimostrato come TB a BL, così OF ad FN. Onde per egualità, come TL ad LB, così ON ad NF. Dei triangoli dunque LTB, ONF sono i lati proporzionali, e però i triangoli LTB, NOF sono equiangoli, e simili fra loro, onde ancora la piramide, la cui base è il triangolo BKT, e'l vertice il punto L è simile alla piramide, la cui base è il triangolo FMO, e 'l vertice il punto N, perciocchè sono contenute da simili piani, ed uguali di numero: ma le piramidi simili, e che hanno le basi triangolari sono in triplicata ragione dei lati omologhi. Adunque la piramide BKTL alla piramide FMN ha ragione triplicata di quella, che ha BK ad FM. Similmente dai punti A, Q, D, V, C, Y a K, e dai punti E, S, H, K, G, P ad M tirando linee rette,

e sù triangoli alzando le piramidi, che abbiano i vertici medesimi, che il cono, dimostreremo ciascuna piramide del medesimo ordine a ciascuna dell'altro ordine avere ragione triplicata di quella, che ha il lato BK omologo al lato omologo FM, cioè, che BD ad FH: ma siccome uno degli antecedenti ad uno dei conseguenti, così tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti: è dunque come la piramide BKTL alla piramide FMON, così tutta la piramide ATBYCVDQ, e 'l vertice il L a tutta la piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N. Onde la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L alla piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N ha ragione triplicata di quella, che ha BD ad FK, e si pone il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L al solido X avere ragione triplicata di quella, che ha BD ad FH. Come dunque il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L al solido X, così è la piramide la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L alla piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N, e permutando come il cono, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto N alla piramide che è in esso, la cui base è il poligono ATBYCVDQ, e 'l vertice il punto L, così il solido X alla piramide la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l vertice il punto N: ma detto cono è maggiore della piramide, che è in esso, perciochè la comprende: dunque anche il solido X è maggiore della piramide, la cui base è il poligono EOFPGRHS, e 'l ver-

tice il punto N, ma è minore, che è impossibile. Il cono dunque, la cui base è il cerchio ABCD, e 'l vertice il punto L a qualche solido minore del cono, la cui base è il cerchio EFGH, e 'l vertice il punto N, non ha ragione triplicata di quella, che ha BD ad FH. Similmente dimostreremo nè anche il cono EFGHM a qualche solido minore del cono ABCDL avere triplicata ragione di quella, che ha FH a BD. Laonde dico nè anche il cono ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN avere ragione triplicata di quella, che ha BD ad FH.

Perciocchè s' egli è possibile abbia a qualche solido maggiore, che sia Z, invertendo dunque il solido Z al cono ABCDL ha ragione triplicata di quella, che ha FH a BD; ma come il solido Z al cono ABCDL così il cono EFGHN a qualche solido minore del cono ABCDL. Adunque ancora il cono EFGHN al solido minore del cono ABCDL avrà ragione triplicata di qnella che ha FH a BD, il che si è dimostrato impossibile: il cono dunque ABCDL ad un solido maggiore del cono EFGHN non ha triplicata ragione di quella che ha BD ad FH: e si è dimostrato nè anche al minore. Onde il cono ABCDL al cono EFGHN ha triplicata ragione di quella, che ha BD ad FH; ma come il cono al cono, così il cilindro, al cilindro (*prop. 15. V.*); perciocchè il cilindro che consiste nella medesima base, che il cono, ed ugualmente alto è triplo del cono, essendosi dimostrato ogni cono essere la terza parte del cilindro, che abbia la medesima base, e l'altezza uguale (*prop. 10 XII.*): adunque il cilindro al cilindro avrà ragione triplicata di quella, che ha BD ad FH.

Laonde i coni, ed i cilindri simili ec. C. B. D.

TEOR. XIII. PROP. XIII.

Se il cilindro sia segato da un piano parallelo ai piani opposti, sarà come il cilindro al cilindro; così l' asse all' asse.

Il cilindro AD (*fig.* 55.) sia segato dal piano GH parallelo ai piani opposti AB, CD, il quale seghi l'asse EF nel punto K. Dico come il cilindro BG al cilindro GD, così essere l' asse EK all'asse KF.

Prolunghisi l'asse EF dall' una, e l'altra parte ne' punti L, M; ed all'asse EK pongansi uguali quante si vogliano EN, NL; ed all' asse FK quante uguali si vogliano FX, XM, e per li punti L, N, X, M tirinsi piani paralleli alli AB, CD, e nei piani per L, N, X, M d'intorno ai centri L, N, X, M intendansi i cerchi OP, RS, TY, VQ uguali alli AB, CD: ed intendansi i cilindri PR, RB, DT, TQ. Perchè dunque gli assi LN, NE, EK sono uguali fra loro, saranno i cilindri PR, RB, BG fra loro come le basi, e le basi sono uguali: adunque i cilindri PR, RB, BG sono uguali Ed essendo gli assi LN, NE, EK uguali fra loro, i cilindri PR, RB, BG anche uguali fra loro, e la moltitudine degli assi LN, NE, EK uguale alla moltitudine de' cilindri PR, RB, BG: quanto l'asse KL è moltiplice dell' asse EK, tanto anche il cilindro PG sarà moltiplice del cilindro GB. Similmente quanto l'asse MK è moltiplice dell'asse KF, tanto il cilindro QG è moltiplice del cilindro GD; e se l'asse LK sia uguale all'asse KM, il cilindro PG sarà uguale al cilindro

GQ, e se l'asse KL sia maggiore dell'asse KM, anche il cilindro PG sarà maggiore del cilindro GQ, e se minore, minore. Essendo dunque quattro grandezze, cioè gli assi EK, KF, ed i cilindri BG, GD, e si sono presi gli ugualmente moltiplici dell'asse EK, e del cilindro BG, cioè l'asse KL, e 'l cilindro PG, e dell'asse KF, e del cilindro GD gli ugualmente moltiplici, cioè l'asse KM, e 'l cilindro GQ, e si è dimostrato se l'asse LK supera l'asse KM, il cilindro PG superare anche il cilindro GQ, e se uguale, uguale, e se minore, minore. È dunque l'asse EK all'asse KF, come il cilindro BG al cilindro GD.

Laonde se il cilindro sia segato ec. C. B. D.

Lo stesso dimostrasi ne' cilindri scaleni.

TEOR. XIV. PROP. XIV.

I coni, ed i cilindri che hanno le basi uguali sono fra loro come le altezze.

Siano nelle uguali basi AB, CD (*fig. 56.*) i cilindri EB, FD. Dico come il cilindro EB al cilindro FD, così essere l'asse GH all'asse KL.

Prolunghisi l'asse KL al punto N, e pongasi la LN uguale all'asse GH, e d'intorno all'asse LN intendasi il cilindro CM. Perchè dunque i cilindri EB, CM hanno la medesima altezza, sono fra loro come le basi, e le basi sono uguali: adunque ancora i cilindri EB, CM saranno uguali fra loro. E perchè il cilindro FM è segato dal piano CD parallelo agli opposti piani, sarà come il cilindro CM al cilindro

FD, così l'asse LN all'asse KL (*prop.* 13. *XII.*), e 'l cilindro CM è uguale al cilindro EB, e l'asse LN all'asse GH. È dunque come il cilindro EB al cilindro FD, così l'asse GH all'asse KL; e come il cilindro EB al cilindro FD, così il cono ABG al cono CDK, perciocchè i cilindri sono tripli de' coni. Adunque altresì come l'asse GH all'asse KL, così il cono ABG al cono CDK, ed il cilindro EB al cilindro FD.

Laonde i coni, ed i cilindri, che hanno le basi uguali ec. C. B. D.

Scolio. Quello che Euclide qui dimostra pe' cilindri retti, ne' quali le altezze sono rappresentate dai loro assi, dimostrasi anche pe' cilindri, e coni scaleni, ed eccone la dimostrazione.

Siano i cilindri scaleni NM, GB (*fig.* 57.) le cui basi uguali siano LPM, GOH, i cui assi siano QP, EK, e le altezze QR, ES. Dico il cilindro NM essere al cilindro GB, come l'altezza QR all'altezza ES.

Si prolunghi l'asse EK e si compia il cilindro GD dell'altezza del cilindro NM. Sarà GD uguale ad NM. Si abbassi dal punto E la perpendicolare EL sul piano CFD prolungato, e l'incontri in L, e l'altro GOH in S. Sarà la ES altezza del cilindro AH, ed ML altezza del cilindro GD ovvero di NM. E perchè i piani CFD, GOH sono paralleli, sarà come FK a KE, così LS ad SE (*prop.* 17 *XI.*). Ma FK è a KE come il cilindro GD, al cilindro GB (*ante.*), sarà pure l'altezza SL all'altezza ES, come il cilindro GD, o l'uguale NM al cilindro GB. E così pure i coni che sono terze parti loro.

Laonde i coni, ed i cilindri scaleni di basi uguali sono come le altezze. C. B. D. *

Scolio. II. Che se i cilindri, e i coni siano di disuguali basi, ed altezze, essi saranno in ragion composta delle basi, e delle altezze.

Imperocchè fatta la stessa costruzione, e supposte le basi LPM, GOH disuguali, e così le altezze, sarà il cilindro NM al cilindro GB in ragion composta di NM a GD, e di GD a GB. Ma NM sta a GD come la base LPM alla base CFD, e 'l cilindro GD sta all'altro GB come l'altezza LS all'altezza SE. Sarà il cilindro NM all'ultimo GB in ragion composta della base LPM alla base GOH, e dell'altezza SL all'altezza SE. C. B. D.

TEOR. XV. PROP. XV.

I coni, ed i cilindri uguali hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze: e que'coni, e cilindri che hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze sono uguali fra loro.

Siano i coni, ed i cilindri uguali, che hanno per basi i cerchi ABCD, EFGH (*fig.* 58.), ed i diametri AC, EG, e gli assi KL, MN, che sono l'altezze de'coni, o cilindri, e compiscansi i cilindri AX, EQ. Dico le basi de'cilindri reciprocarsi colle altezze, cioè come la base ABCD alle base EFGH, così essere l'altezza MN all'altezza KL.

Imperocchè l'altezza KL, o è uguale all'altezza MN, o disuguale. Sia prima uguale; ed è il cilindro AX uguale al cilindro EO: ma que'coni, e cilindri che hanno la medesima altezza sono fra loro come le basi. È dunque la base ABCD uguale alla base

EFGH. E però sono reciproche, e come la base ABCD alla base EFGH, così è l'altezza MN all'altezza KL. Ma l'altezza KL non sia uguale all'altezza MN, e sia maggiore la MN: tolgasi dalla MN la PM uguale all'altezza LK, e per P si seghi il cilindro EO dal piano TYS parallelo agli opposti piani de' cerchi EFGH, RO; ed intendasi il cilindro ES, la cui base è il cerchio EFGH, e l'altezza PM. Perchè dunque il cilindro AX è uguale al cilindro EO, ed è un'altro cilindro ES; sarà come il cilindro AX al cilindro ES, così il cilindro EO al cilindro ES. Ma come il cilindro AX al cilindro ES, così è la base ABCD alla base EFGH: perciocchè i cilindri AX, ES hanno la medesima altezza *(prop. 11. XII.)*, e come il cilindro EO al cilindro ES, così l'altezza MN all'altezza MP, perocchè il cilindro EO è segato dal piano TYS parallelo ai piani opposti *(prop. 13. XII.)*. È dunque come la base ABCD alla base FFGH, così l'altezza MN all'altezza MP; e l'altezza MP è uguale all'altezza KL. Onde come la base ABCD alla base EFGH, così l'altezza MN all'altezza KL. Le basi dunque de' cilindri uguali AX, EO sono reciproche alle altezze. Ma le basi de' cilindri AX, EO siano reciproche alle altezze, e sia come la base ABCD alla base EFGH, così l'altezza MN all'altezza KL. Dico il cilindro AX essere uguale al cilindro EO. Fatta la stessa costruzione, perchè come la base ABCD alla base EFGH, così è l'altezza MN all'altezza KL: e l'altezza KL è uguale all'altezza MP, sarà come la base ABCD alla base EFGH, così l'altezza MN all'altezza MP. Ma come la base ABCD alla base

EFGH, così il cilindro AX al cilindro ES, perciocchè hanno la stessa altezza, e come l'altezza MN all'altezza MP, così il cilindro EO al cilindro ES. È dunque come il cilindro AX al cilindro ES, così il cilindro EO al cilindro ES. Onde il cilindro AX è uguale al cilindro EO. Similmente ancora nè coni.

Laonde i coni, ed i cilindri uguali ec. C. B. D.

PROB. I. PROP. XVI.

Essendo due cerchi intorno al medesimo centro, descrivere nel maggiore un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore.

Siano due cerchi dati ABCD, EFGH, (*fig. 59.*) intorno al medesimo centro K. Bisogna nel maggior cerchio ABCD descrivere un poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore EFGH.

Si tiri per lo centro K la linea retta BD, e dal punto G si tiri la AG perpendicolare alla BD, e prolunghisi nel punto C. Adunque la AC tocca il cerchio EFGH (*prop. 16 III.*). Laonde segando la circonferenza BAD per metà, e la sua metà ancora per metà, e facendo sempre ciò, alla fine lasceremo una circonferenza minore della AB. Lascisi, e sia LD; e dal punto L si tiri LM perpendicolare alla BD, e si prolunghi nel punto N, e si congiungano LD, DN, LN: adunque la LD è uguale alla DN. E perchè la LN è parallela alla AC, e la AC tocca il cerchio EFGH, la LN non toccherà il cerchio EFGH; e molto meno lo toccheranno le LD, DN,

E se nel cerchio ABCD adatteremo linee rette uguali alla LD, si descriverà in esso il poligono di lati uguali, e pari di numero, che non tocca il cerchio minore EFGH.

Laonde essendo dati due cerchi ec. C. B. F.

PROB. II. PROP. XVII.

Date due sfere d' intorno al medesimo centro, descrivere nella maggiore un solido poliedro, cioè di molti lati, che non tocchi la superficie della sfera minore.

Intendansi due sfere d'intorno al medesimo centro A (*fig. 60*). Bisogna nella maggiore sfera descrivere un solido di molti lati, che non tocchi la superficie della sfera minore.

Seghinsi le sfere da qualche piano tirato per lo centro. Le sezioni saranno cerchi, perciocchè stando fermo il diametro del cerchio, e rivolto intorno il semicerchio si è fatta la sfera. Adunque intendendo il semicerchio in qualsivoglia posizione, il piano, che passa per esso farà un cerchio nella superficie della sfera, ed è manifesto essere cerchio massimo; perocchè il diametro della sfera, che è diametro del cerchio, e del semicerchio è maggiore di tutte le linee rette, che si tirano nel cerchio, e nella sfera. Sia dunque nella sfera maggiore il cerchio BCDE, nella minore il cerchio FGH, e tirinsi i due diametri di essi BD, CE perpendicolari fra loro. Ed essendo i due cerchi BCDE, FGH d'intorno al medesimo centro, descrivasi nel maggiore BCDE un poligono di lati

uguali, e pari di numero, che non tocchi il cerchio minore FGH, i lati del quale nel quadrante del cerchio BE siano BK, KL, LM, ME, e congiunta KA prolunghisi in N, e dal punto A constituiscasi AX perpendicolare al piano del cerchio BCDE, che tocchi la superficie della sfera nel punto X, e per AX; e ciascuno delle BD, KN si tirino i piani, che dalle cose dette faranno nella superficie della sfera cerchi massimi. Li facciano dunque, e siano nei diametri BD KN i semicerchi loro BXD, KXN. E perchè la XA è perpendicolare al piano del cerchio BCDE, tutti i piani, che passano per la XA saranno perpendicolari al piano del cerchio BCDE (*prop.* 38 *XI*). Onde anche i semicerchi BXD, KXN sono perpendicolari al medesimo piano. E perchè i semicerchi BED, BXD, KXN sono uguali, essendo negli uguali diametri BD, KN, saranno ancora i quadranti BE, BX, KX fra loro uguali. Quanti lati dunque del poligono sono nel quadrante BE, tanti sarano nei quadranti BX, KX uguali ai BK, KL, LM, ME. Descrivansi, e siano BO, OP, PR, RX, KS, ST, TY, YX, e si congiungano SO, TP, YR, e dai punti O, S si tirino le perpendicolari al piano del cerchio BCDE, cadranno queste nelle comuni sezioni dei piani BD, KN (*prop.* 38 *XI.*). Perchè ancora i piani dei cerchi BXD, KXN sono perpendicolari al piano del cerchio BCDE; cadano dunque, e siano OV. SQ, e giungasi VQ. Essendo dunque negli uguali semicerchi BXD, KXN prese le circonferenze uguali BO, KS, e tirate le perpendicolari OV, SQ: sarà OV uguale ad SQ, e BV uguale a KQ; ed è tutta la BA uguale a tutta la KA: adun-

que la rimanente VA è uguale anche alla rimanente QA. Come dunque la BV alla VA, così la KQ alla QA (*prop. 2. VI*): e però la VQ è parallela alla BK, ed essendo ciascuna delle OV, SQ perpendicolare al piano del cerchio BCDE, sarà la OV parallela alla SQ; si è dimostrata uguale ad essa: dunque le QV, SO sono uguali, e parallele (*prop. 33. I.*). E perchè la QV è parallela alla SO, e parallela alla KB, sarà la SO parallela ancora alla KB (*prop. 9 XI.*) e BO KS le congiungono; onde eziandio il quadrilatero KBOS è in un piano, perchè se due linee rette siano parallele, ed in ciascuna di esse si prendano quali si vogliano punti, la linea retta, che congiunge questi punti è nel medesimo piano, nel quale sono le parallele (*prop. 6. XI.*), e per la medesima ragione amendue i quadrilateri SOPT, TPRY sono in un piano, ed è in un piano il triangolo YRX: se dunque dai punti O, S, P, T, R, Y intendiamo tirate le linee rette ad A, si costituirà una figura solida di molti lati fra le circonferenze BX, KX composta di piramidi, le cui basi sono i quadrilateri KBOS, SOPT, TPRY, e 'l triangolo YRX, e 'l vertice il punto A, e se in ciascun lato KL, LM, ME, come in BK facciamo la medesima costruzione, e così negli altri tre quadranti, e nell'altra mezza sfera, si constituirà una figura di molti lati descritta nella sfera, composta di piramidi, le cui basi sono i detti quadrilateri, e 'l triangolo YRX, e gli altri del medesimo ordine, e 'l vertice il punto A. Dico la detta figura di molti lati non toccare la superficie della minore sfera, nella quale è il cerchio FGH.

Si abbassi dal centro A nel piano del quadrilatero

la perpendicolare AZ. Dico essere essa maggiore di AG. Tirisi ancora dal punto G la GL perpendicolare ad AG, e congiungasi AL. Onde segando per metà la circonferenza EB, e la sua metà similmente per metà, e questo facendo sempre; alla fine lasceremo una circonferenza minore della circonferenza del cerchio BCD, che è sottoposta ad una uguale a GL. Lascisi, e sia la circonferenza KB. Adunque la linea retta KB è minore della retta GL. Tirata dal punto A al piano del quadrilatero KBSO la perpendicolare AZ, che lo tocchi nel punto Z, si uniscano BZ, ZK. Laonde AZ essendo perpendicolare al piano del quadrilatero KBSO, sarà perpendicolare anche alle BZ, ZK; che lo toccano, e sono nel medesimo piano: ed essendo AB uguale ad AK, saranno i loro quadrati uguali, ed il quadrato di AB è uguale ai quadrati delle AZ, ZB, perchè l'angolo Z è retto; ed il quadrato di AK è uguale ai quadrati delle AZ, ZK (*prop.47 I.*). Onde i quadrati delle AZ, ZB sono eguali ai quadrati delle AZ, ZK: tolgasi il comune quadrato di AZ, il rimanente quadrato di BZ è uguale al rimanente quadrato di ZK, e quindi BZ è uguale a ZK. Similmente si dimostrano quelle, che del punto Z si tirino ai punti O, S, essere uguali all'una, e l'altra delle BZ, ZK. Adunque il cerchio descritto dal centro Z coll'intervallo di una delle ZB, ZK passerà anche pe' punti O, S, onde il quadrilatero KBOS sarà inscritto nel cerchio. E perchè il quadrilatero KBSO è nel cerchio, e sono uguali OB, BK, KS, ed OS minore; sarà l'angolo BZK ottuso (*), e perciò la BK è maggiore

(*) *Ciò è chiaro, poichè descritto il cerchio*

delle BZ; ma la GL è maggiore della BK: la GL dunque è molto maggiore della BZ; e 'l quadrato della GL è maggiore del quadrato della BZ: ed essendo la AL uguale alla AB, sarà il quadrato della AL uguale al quadrato della AB: ma al quadrato della AL sono uguali i quadrati delle AG, GL, ed al quadrato della AB sono uguali i quadrati delle BZ, ZA. Adunque i quadrati delle AG, GL sono uguali ai quadrati delle BZ, ZA: dei quali il quadrato della BZ è minore del quadrato della GL: Onde il rimanente quadrato della ZA è maggiore del quadrato della AG: e perciò la linea retta ZA è maggiore della retta AG.

Adunque essendo due sfere intorno ec. C. B. D.

BKSO, ed in esso il quadrilatero BKSO, *i cui lati SK, KB, BO, SO siano uguali ai lati del quadrilatero BKSO nella sfera, e tirate dal centro Z le ZK, ZS, ZO, ZB, i due lati BZ, ZO sono uguali ai due OZ, ZS, ed essendo BO maggiore di OS, l'angolo BZO sarà maggiore dell'angolo OZS, e così pure ciascuno de' BZK, KZS, che è uguale a BZO, come insistendo in circonferenze uguali OB, BK, KS, che* sono *sottese da rette uguali, sarà maggiore di OZS. Ed essendo tutti gli angoli in Z uguali a quattro retti* (cor. prop. 15. I.), *sarà ciascuno de' BZO, BZK, KZS ottuso, e quindi ottusangolo il triangolo BZK, e perciò il quadrato di KB maggiore del quadrato di KZ* (prop. 12. II.), *e KB maggiore di KZ.*

COROLLARIO.

E se anche in un altra sfera si descriva un solido poliedro simile al solido poliedro descritto nella sfera ABCDE, avrà il solido poliedro nella sfera BCDE al solido poliedro nell' altra sfera triplicata ragione di quella, che ha il diametro della sfera BCDE al diametro dell' altra sfera. Perocchè divisi i solidi in piramidi uguali di numero, e del medesimo ordine, saranno esse piramidi simili; ma le piramidi simili sono fra loro in ragione triplicata di quella, che hanno i lati omologhi. Adunque la piramide, la cui base è il quadrilatero KBOS, e 'l vertice il punto A alla piramide, che è nell'altra sfera del medesimo ordine ha ragione triplicata di quella, che ha il lato omologo al lato omologo; cioè AB semidiametro della sfera intorno al centro A al semidiamentro dell' altra sfera. E similmente ciascuna piramide di quelle, che sono nella sfera intorno al centro A a ciascuna piramide del medesimo ordine, che sono nell'altra sfera, avrà ragione triplicata di quella, che ha AB al semidiametro della sfera; e come è uno degli antecedenti ad uno dei conseguenti, così saranno tutti gli antecedenti a tutti i conseguenti. Onde tutto il solido poliedro, che è nella sfera intorno al centro A a tutto il solido poliedro, che è nell' altra sfera avrà triplicata ragione di quella, che ha AB al semidiametro dell' allra sfera, cioè il diametro BD al diametro dell' altra sfera.

TEOR. XVI. PROP. XVIII.

Le sfere sono fra loro in triplicata ragione di quella, che hanno i loro diametri.

Intendansi le sfere ABC, DEF *(fig.61.)* i diametri delle quali siano BC, EF. Dico la sfera ABC alla sfera DEF avere ragione triplicata di quella, che ha la BC alla EF.

Imperocchè se non è così, la sfera ABC ad una sfera minore di essa DEF, o a maggiore avrà ragione triplicata di quella, che ha la BC alla EF. Abbia prima a minore, cioè a GHK: ed intendasi la sfera DEF d'intorno al medesimo centro, che la sfera GHK: e descrivasi nella maggiore sfera DEF un solido poliedro, che non tochi la minore sfera GHK nella superficie, e nella sfera ABC descrivasi un solido poliedro simile a quello, che è descritto nella sfera DEF *(prop. antec.)* Adunque il solido poliedro, che è nella sfera ABC al solido poliedro, che é nella DEF avrà triplicata ragione di quella che ha la BC alla EF *(corol. prop. antec.)*, e la sfera ABC alla sfera GHK ha triplicata ragione di quella, che ha la BC alla EF. Come dunque la sfera ABC alla sfera GHK, così il solido poliedro nella sfera ABC al solido poliedro nella sfera DEF, e permutando come la sfera ABC al solido poliedro, che è in essa, così la sfera GHK al solido poliedro, che è nella sfera DEF: ma la sfera ABC è maggiore del solido poliedro, che è in essa, adunque la sfera GHK è maggiore del solido poliedro, che è nella sfera DEF: ma è ancora minore, perciochè da esso è compresa, il che non è possibile. La

sfera dunque ABC ad una sfera minore della DEF non ha ragione triplicata di quella, che ha la BC alla EF.

Similmente dimostreremo nè anche la sfera DEF ad una sfera minore della ABC avere triplicata ragione di quella, che ha la EF alla BC. Dico in oltre la sfera ABC non avere ad una sfera maggiore della DEF triplicata ragione di quella, che ha la BC alla EF.

Perciocchè abbia s'egli è possibile ad una maggiore, che sia LMN: invertendo dunque la sfera LMN alla sfera ABC ha ragione triplicata di quella, che ha il diametro EF al diametro BC. E come la sfera LMN alla sfera ABC, così la sfera DEF ad una sfera minore della ABC, come si è dimostrato di sopra, perchè la sfera LMN è maggiore della DEF. Onde ancora la sfera DEF ad una sfera minore della ABC ha ragione triplicata di quella, che ha la EF alla BC, che si è dimostrato essere impossibile.

Adunque la sfera ABC alla sfera maggiore della DEF non ha ragione triplicata di quella, che ha la BC alla EF: e si è dimostrato nè anche alla minore. Adunque la sfera ABC alla sfera DEF avrà triplicata ragione di quella, che ha la BC alla EF.

Laonde le sfere sono fra loro ec. C. B. D.

FINE DEL DUODECIMO LIBRO.

DEI TEOREMI

DI

ARCHIMEDE.

RELATIVI ALLA SFERA ED AL CILINDRO.

LIBRO UNICO.

DEFINIZIONI, E PRINCIPII.

I. Chiamasi linea cava nella parte stessa quella che giace su di un piano, e nella quale presi comunque due punti, la linea retta, che li unisce, o cade dalla stessa parte di essa, o secondo la sua direzione, niuna poi cade all'altra parte.

II. Le superficie finite sono quelle che non giacciono nel piano, ma hanno i loro estremi nel piano, le quali o saranno tutte nelle parti stesse di quel piano dove giacciono i loro termini, o nulla avranno nell'altra parte.

III. Chiamansi quelle tali superficie cave verso le stesse parti, qualora presi in esse due punti, le linee

rette frapposte tra essi, o tutte cadono nelle stesse parti della superficie, o talune nelle stesse parti, talune nella loro direzione; niuna poi cade nelle altre parti.

IV. Di tutte le linee che hanno li stessi termini, la minima è la linea retta. Le altre poi che sono nel piano aventi i stessi termini, sono disuguali.

V. Le linee poi cave dalla stessa parte, l'una sia tutta contenuta dall'altra, quella che è contenuta è la minore. Similmente le superficie, che hanno li stessi termini nel piano quella che è contenuta è minore di quella che contiene.

VI. Il piano è la minima superficie di quelle che hanno li stessi termini nel piano. Le altre superficie cave dalla stessa parte aventi li stessi termini nel piano sono disuguali, ed è minore sempre quella che è compresa, o che talune parti sieno comuni, o altre nò. Lo stesso dicasi de' solidi, ne' quali il compreso è minore di quello che comprende.

VII. Se un cono penetri una sfera, finchè il vertice del cono sia al centro di quella, il solido, contenuto dalla superficie del cono, e della parte della superficie sferica troncata su di essa chiamasi settore solido, o settore sferico.

VIII. Rombo solido chiamasi quel solido, che contiene due coni situati sulla stessa base, ma i vertici sono opposti, cosicchè i loro assi sono in una stessa retta.

TEOR. I. PROP. I.

Se s'inscriva nel cerchio un poligono, il perimetro del poligono inscritto è minore della circonferenza del cerchio.

Imperocchè ciascun lato del poligono è minore dell'arco del cerchio che sottende *(def. IV.)*. Laonde tutto il perimetro del poligono è minore di tutta la circonferenza C. B. D.

TEOR. II. PROP. II.

Se ad un cerchio si circoscriva una figura poligona, la linea retta uguale al perimetro della figura circoscritta è maggiore della circonferenza del cerchio.

Sia il cerchio ABCDE *(fig. 62.)*, cui sia circoscritta la figura poligona FGHKL. Dico la linea retta uguale al perimetro di tal figura essere maggiore della circonferenza del cerchio.

Perchè le due linee rette FA, FE comprendono l'arco AE, saranno esse maggiori dell'arco AE *(def. V.)*. Similmente le due AG, GB saranno maggiori dell'arco AB. Così pure le rimanenti rette saranno maggiori de' rimanenti archi. Onde l'intero perimetro FGHKL è maggiore dell'intera circonferenza ABCDE.

Se dunque ad un cerchio si circoscriva ec. C. B. D.

TEOR. III. PROP. III.

Se in un cono retto s'inscriva una piramide, che abbia la base equilatera, la superficie di tal piramide, senza la base, è uguale ad un triangolo, la cui base sia uguale al perimetro della base della piramide, e l'altezza alla perpendicolare, che dal vertice del cono si abbassa sopra uno de' lati della base della piramide.

Sia il cono retto, la cui base sia il cerchio ABC (*fig.63*) dentro di cui s' inscriva la piramide a base equilatera, che sia ABCV. Dico la superficie di questa essere uguale al triangolo DEF, la cui base DE sia uguale alle tre rette AB, BC, CA, e l'altezza FG sia uguale all'altezza di uno de' triangoli della piramide.

Imperocchè dividasi la DE in tre parti DT, TH, HE uguali ai tre lati della base della piramide, ed unite le FT, FH, i triangoli DFT, TFH, HFE sono uguali ai tre triangoli VAB, VBC, VCA, essendo l'altezza FG uguale all'altezza di ciascuno de triangoli della piramide, e la basi alle basi. Laonde tutto il triangolo DEF è uguale ai tre della piramide.

Adunque se in un cono ec. C. B. D.

TEOR. IV. PROP. IV.

Se ad un cono equilatero si circoscriva una piramide, la superficie della piramide, eccetto la base, è uguale ad un triangolo rettangolo, che abbia la base uguale alle linee che contengono la base della piramide, e l'altezza uguale al lato del cono.

Sia il cono, la cui base il cerchio ABC (*fig.64*), e si circoscriva ad esso la piramide DEFG, cosicchè i lati della base DEF tocchino il cerchio ABC base del cono. Dico la superficie di cotesta piramide, eccetto la base, essere uguale al triangolo rettangolo HKL, la cui base KH sia uguale alle linee DE, EF, DF prese insieme, e l'altezza LM uguale ad una delle altezze de' triangoli GED, GEF, GDF, cioè GA.

Essendo l'asse del cono perpendicolare alla base ABC, e le linee rette, che dal centro si tirano ai contatti A, B, C sono perpendicolari alle DE, EF, FD tangenti il cerchio ABC (*prop. 16. III.*): saranno ancora le linee GA, GB, GC tirate dal vertice G del cono a' contatti medesimi che si sono poste eguali fra loro, come lati del cono, perpendicolari alle DE, DF, EF. Perciocche unito l'asse GO, e la AO, il triangolo GAO è perpendicolare alla base ABC; ed essendo DA perpendicolare alla AO, sarà anche perpendicolare al piano GAO, e quindi a tutte le rette che sono in esso, e perciò alla GA: onde la GA è perpendicolare alla DE, e così pure tutti i lati del cono saranno perpendicolari alle linee tangenti la base di esso cono. E per-

chè i triangoli, GED, GEF, GDF che sono intorno alla piramide hanno la medesima altezza, che è il lato del cono, essi saranno uguali al triangolo HKL, che ha l'altezza LM uguale all'altezza de' triangoli, e la base KH uguale alle basi DE, EF, FD de' triangoli della piramide, sarà il triangolo HKL uguale ai tre GED, GEF, GDF, i quali costituiscono la superficie della piramide EDFG circoscritta al cono.

Laonde se ad un cono si circoscriva una piramide ec. C. B. D.

TEOR. V. PROP. V.

Qualunque cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo, di cui un lato che è intorno all' angolo retto sia uguale al raggio del cerchio, l'altro alla circonferenza di esso.

Sia il cerchio ABCD. (*fig.65*). Dico essere uguale al triangolo rettangolo HKL di cui il lato HK intorno all' angolo retto sia uguale al raggio NA del cerchio ABCD, e KL alla circonferenza ABCD.

Se può essere sia il cerchio maggiore del detto triangolo, e nel cerchio s' inscriva il quadrato AC, e si dividano per metà gli archi sottesi dai lati del quadrato; e si tirino le linee BF, FA, e così si faccia, finche si giunga ad iscrivere una figura rettilinea, che sia maggiore del triangolo HKL: sia cotesta figura quella del lato FA; e trovato il centro del cerchio, che sia N, da esso si abbassi la perperidicolare NX sul lato FA. Adunque NX è minore del lato del triangolo HK, che è uguale al raggio. Ma,

il perimetro della figura è minore anche della circonferenza ABCD. Dunque la detta figura è minore del triangolo. Ma n'è maggiore. Che è assurdo. Sia similmente, se può essere, il cerchio minore del triangolo, ed al cerchio ABCD si circoscriva il quadrato OQ, e si dividano per metà gli archi racchiusi tra i lati di cotesto quadrato che toccano il cerchio, e per i punti delle divisioni si tirino le tangenti: l'angolo OAR è retto. Laonde OR ipotenusa sarà maggiore di RA, e quindi di RM, essendo RA uguale ad RM (*prop. 8. III.*), ed il triangolo ROP è maggiore della metà della figura OFAM, perciocchè il triangolo rettilineo ROA è maggiore di RAM, per essere la base OR maggiore di RM, ed il vertice comune A: onde ORA è maggiore del trilineo ARM, e così OAP è maggiore del trilineo FPA. Quindi il triangolo OPR è maggiore di due trilinei APF, ARM, quindi anche maggiore della metà di quella parte del quadrato circoscritto al cerchio, che è verso O. Si prendano dunque delle porzioni simili alla PFA che siano minori dell' eccesso, onde il triangolo HKL supera il cerchio ABCD: e perciò anche la medesima figura rettilinea circoscritta al cerchio sarà minore del triangolo HKL, il che similmente è assurdo. Imperocchè si dimostra essere maggiore, perchè NA è uguale alla perpendicolare del triangolo, ma il perimetro della detta figura è maggiore della base del triangolo, che è la circonferenza.

Laonde il cerchio necessariamente sarà eguale al detto triangolo. Adunque ogni cerchio è uguale ec. C. B. D.

TEOR. VI. PROP. VI.

Le circonferenze de' cerchi hanno tra loro la stessa ragione che i loro raggi.

Siano i due cerchi ABC, DEF (*fig. 66.*), e i loro raggi MN RP. Dico la circonferenza ABC essere alla circonferenza DEF come il raggio MN al raggio RP.

Si costituiscano due rettangoli MNCD, RPFQ, il primo abbia l'altezza MN uguale al raggio del cerchio ABC, e la base uguale alla metà della sua circonferenza, il secondo similmente l'altezza uguale al raggio RP, e la base PF uguale alla semicirconferenza di EDF, saranno questi uguali rispettivamente ai cerchi M, R. Inoltre si constituiscano sui raggi MN, e PR i quadrati X, ed Y. Adunque il cerchio ABC sta al cerchio EDF come il rettangolo MNCD al rettangolo PRQF; ma quei cerchi sono anche come i quadrati de' loro raggi, cioè come X ad Y. Laonde il rettangolo MC è al rettangolo RF, come X ad Y, e permutando sta rettangolo MC a quadrato X, come RF a Y, ma il rettangolo MC sta ad X come NC ad MN, per avere la stessa altezza, e PQ ad Y come PF a PR, per avere la stessa altezza PR. Dunque sarà NC ad MN, come PF a PR, e permutando NC a PF, come MN a PR, e prendendo i doppj della prima ragione, sarà la circonferenza ABC alla EDF, come MN a PR.

Laonde le circonferenze sono come i raggi. C.B.D.

TEOR. VII. PROP. VII.

Se dentro di un cerchio, ch' è base di un cono retto si tiri una segante, e da' termini di essa si tirino al vertice del cono due linee rette: il triangolo costituito dalla segante il cerchio, e dalle rette tirate da suoi estremi al vertice é minore della superficie conica che è tra quelle due rette tirate al vertice.

Sia il cono retto, che è pure equilatere ABCD (*fig. 67.*), la cui base è il cerchio BCD, D il suo vertice, e si tiri nella base la retta AC, e dal vertice D si tirino le AD, DC. Dico che il triangolo ADC sia minore della superficie conica compresa tra ADC.

Si divida la circonferenza ABC in due parti uguali in B, e si conducano le rette AB, BC, DB. Saranno i triangoli ADB, CDB maggiori del triangolo ADC (*def. V.*): Sia lo spazio H l' eccesso de' due triangoli ADB, CDB sul triangolo ADC. Sarà H o minore de' segmenti AB, BC, o non minore. Pongasi in primo luogo non minore. Adunque perchè le due superficie, la conica cioé tra ABD, col segmento AEB, e la triangolare ADB sono chiuse dalli stessi termini, cioè dalle linee del triangolo ADB; sarà la superficie che comprende maggiore della compresa. Dunque la superficie conica tra le AB, BD, AD una col segmento AEB é maggiore del triangolo ABD. Similmente la superficie conica tra DBC, e'l segmento BFC è maggiore del triangolo DBC. Dunque l' intera superficie conica co' segmenti

sarà maggiore de'triangoli ADB, CDB, ovvero di ADC collo spazio H: tolto lo spazio H, che è comune, la rimanente superficie conica compresa tra ADC sarà maggiore del triangolo ADC.

Pongasi in secondo luogo lo spazio H minore de'segmenti AEB, BFC. Dividendo dunque gli archi, AB, BC per metà, e questa metà inoltre per metà, prenderemo finalmente i segmenti, i quali siano minori dello spazio H (*Lem. alla prop. 2 XII.*). Siano tali segmenti quelli contenuti dalle linee AE, EB, BF, FC, e si conducano le rette DE, DF. Nel medesimo modo si dimostrerà la superficie del cono contenuta tra AED col seguento AE maggiore del triangolo AED; e quella tra EDB col segmento EB maggiore del triangolo EDB. Dunque la superficie conica compresa tra ADB coi seguenti AE, EB sarà maggiore de'triangoli ADE, EDB. Ed essendo i triangoli ADE, EDB maggiori del triangolo ADB, come si è dimostrato, sarà la superficie conica compresa tra ADB, una co'seguenti AE, EB maggiore del triangolo ADB; e nell'istesso modo la superficie conica compresa tra BDC co'segmenti BF, FC si dimostra maggiore del triangolo DBC. Laonde l'intera superficie conica, che tra ADC si comprende, co'segmenti AE, EB, BF, FC, è maggiore de'triangoli ADB, BDC, ossia del triangolo ADC collo spazio H, cui que' due triangoli sono eguali. Ed essendo lo spazio H maggiore de'segmenti, ne segue, come nella prima parte, che la superficie contenuta tra ADC sia maggiore del triangolo ADC. Laonde se si tiri una retta in un cerchio ec. C.B.D.

Coroll. Dalla dimostrazione del Teorema segue, che se nel cono retto s'iscriva una piramide, la su-

perficie di questa è minore della superficie conica, in cui è iscritta. Poichè ciascuno de' triangoli che comprende la piramide è minore della superficie conica, che insiste su'suoi lati.

Laonde tutta la superficie della piramide, eccettuata la base, è minore della superficie conica, eccettuata similmente la base.

TEOR. VIII. PROP. VIII.

Se ad un cerchio, base di un cono si tirino due tangenti, le quali siano nell'istesso piano del cerchio, e concorrano in un punto; e da'punti di contatto, e dal punto del concorso si tirino al vertice del cono le linee rette, i triangoli costituiti dalle tangenti, e dalle linee congiungenti il vertice co' detti punti saranno maggiori della superficie conica, che contengono essi triangoli.

Sia il cono, la cui base il cerchio ABC, (*fig.68*) il vertice il punto E, e si tirino ad esso cerchio le tangenti nel medesimo piano del cerchio, che siano AD, CD, e dal punto E che è il vertice del cono si tirino ai punti A, D, C le linee rette EA, ED, EC. Dico essere i triangoli AED, DEC maggiori di quella superficie del cono che è contenuta dalle rette AE, EC, e dall'arco ABC.

Imperocchè diviso l'arco ABC in due parti uguali nel punto B, e dal punto B si tiri una linea retta che tocchi il cerchio, e si distenda dall'una all'altra parte, la quale sia FBG: sarà questa parallella alla corda AC dentro del cerchio. Ciò si dimostra

facilmente. Si unisca il centro T del cerchio col punto D, sarà l'angolo ADC diviso per metà; ma per essere l'arco AB uguale a BC, la linea DT passerà pel contatto B, e sarà perpendicolare alla tangente FBG: quindi i due triangoli DBF, DBG avendo due angoli uguali a due angoli, e'l lato DB di comune, sarà DF uguale a DG, ma DA è uguale a DE. Dunque FA è uguale a GC. Perciò sarà FG parallela ad AC (*prop. 2 VI.*). Dipoi dal vertice E del cono si tirino giù le linee EF, EG. E perchè le linee FD, GD insieme prese sono maggiori della linea FG, se si aggiungano di comune AF, e CG, saranno le intere linee AD, DC maggiori delle AF, FG, CG; e perchè EA, EB, EC sono lati del cono, perciò sono eguali, essendo esso cono retto, o equilatere. Sono pure cotesti lati perpendicolari alle tangenti AD, CD, essendo retti gli angoli EAD, ECD. Imperocchè tirato l'asse del cono, che sarà perpendicolare alla base, e sarà un cateto del triangolo rettangolo generatore di esso cono, di cui il lato EA, come ogni altro è l'ipotenusa, il piano che passa per l'asse sarà perpendicolare al cerchio ABC, ma DA tangente è perpendicolare al raggio di esso cerchio, il quale è l'altro cateto del triangolo rettangolo, ed essendo cotesto raggio la comune sezione del triangolo col piano del cerchio (*prop. 3 XI.*), sarà DA perpendicolare ad esso piano, e quindi ad AE. Così pure ogni lato EC è perpendicolare alla tangente DC. Adunque le basi de' triangoli AED, DEC, cioè le AD, DC essendo maggiori delle basi AF, FG, GC de' triangoli AEF, FEG, GEC, le loro altezze poi, cioè

le perpendicolari EA, EB, EC sono eguali fra loro perciò i triangoli AED, DEC saranno maggiori dei triangoli AEF, FEG, GEC. Quanto poi i triangoli AED, DEC eccedono i triangoli AEF, FEG, GEC sia uguale allo spazio H. Adunque H o è minore della superficie che vien compresa dalle linee rette AF, FG, GC, e dagli archi AB, BC intorno alla circonferenza, o non minore di esse. Sia primieramente lo spazio H non minore. Adunque poichè si hanno due superficie congiunte, una di quella piramide, che ha per base la superficie quadrangolare AFGC, e 'l vertice E, l'altra conica rinchiusa tra AEC col segmento ABC; ed ambo queste insistono sui medesimi termini, cioè sulle linee del triangolo AEC; è chiaro da ciò che la superficie della piramide, eccetto il triangolo AEC sia maggiore della superficie, conica una col segmento del cerchio ABC. Tolto questo segmento, che è comune ad entrambe le superficie, rimarranno i triangoli AEF, FEG, GEC, insieme co' trilinei, maggiore della superficie conica compresa dall' arco ABC, e dal vertice E, Ma poichè lo spazio H si è supposto non minore di que' trilinei: saranno per ciò i detti triangoli AEF, FEG, GEC una collo spazio H maggiori della superficie conica già detta. E cotesti triangoli insieme con H pareggiano i triangoli AED, DEC. Saranno dunque i triangoli AED, DEC maggiori di quella superficie conica.

Sia in secondo luogo lo spazio H minore di quei trilinei, allora descrivansi continuamente intorno alla circonferenza ABC le figure poligone, sempre dividendo gli archi per metà, e tirando da' punti

delle divisioni tangenti al cerchio, e ciò sempre facendo, finchè si perverrà a de' trilinei, che insieme presi siano minori dello spazio H (*dim. prop. 5.*) Siano dunque trilinei AMK, KNB, BXL, LOC, che siano minori dello spazio H: e da ciascuno de' punti A, K, B, L, si conducano le linee rette al vertice E. Si dimostra similmente che i triangoli AEF, FEG, GEC siano maggiori de' triangoli AEM, MEN, NEX, XEO, OEC, perocchè le basi di quelli prese insieme sono maggiori delle basi di questi prese insieme; e le altezze di tutti sono eguali. Onde siegue di nuovo, che la superficie della piramide, la cui base è la figura poligona AMNXOC, e 'l vertice E, eccettuato il triangolo AEC, sia maggiore della superficie conica che fra AEC si contiene, insieme col segmento ABC. Tolto dunque cotesto segmento comune ABC, la rimanente superficie della piramide, che consta de' triangoli AEM, MEN, NEX, XEO, OEC, e de' trilinei AMK, KNB, BXL, LOC sarà necessariamente maggiore della rimanente superficie conica, che tra AEC si contiene. Ma lo spazio H si è posto maggiore de' trilinei predetti. Inoltre i triangoli AEF, FEG, GEC si sono dimostrati essere maggiori dei triangoli AEM, MEN, NEX, XEO, OEC. Dunque moltoppiù i triangoli AEF, FEG, GEC, insieme collo spazio H, i quali sono eguali ai triangoli AED, DEC, sono maggiori della superficie conica.

Laonde rimane necessariamente dimostrato, che i triangoli ADC, DEC siano maggiori ancora della medesima superficie. C. B. D.

Corol. Se dunque si circoscriva ad un cono retto una piramide, la superficie di questa, senza la base sarà maggiore della soperficie conica senza la base.

TEOR. IX. PROP. IX.

Se si conducano da due punti di una delle basi del cilindro retto due linee rette a due altri punti dell'altra base, la superficie cilindrica frapposta a queste due linee sarà maggiore della superficie quadrilatera, che risulta da quelle due rette, e da due altre che congiungono i loro estremi.

Sia il cilindro retto, la cui base sia il cerchio AEB (*fig.69.*), e la sua cima il cerchio CFD: si conducano due linee rette AC, BD, i cui estremi A, B si congiungano colla linea AB; e così pure gli altri C, D colla retta CD, le quali seghino i cerchi AEB, CFD. Dico che la superficie del cilindro racchiusa dalle linee rette AC, BD sia maggiore della superficie parallellogramma ABDC, piana.

Si dividano gli archi AB, e CD in parti uguali nè punti E, F, e si tirino le rette AE, EB; similmente le CF, FD. Ciò posto, perchè le linee rette AE, BE sono maggiori della AB, e su di esse stando i due parallelogrammi AF, FB egualmente alti che il cilindro, e'l parallelogrammo ABDC, saranno i due parallelogrammi AF, FB (*1. VI*) maggiori del parallelogrammo ABDC. Sia lo spazio G uguale all'eccesso di cotesti due parallellogrammi sul parallelogrammo ABDC. Cotesto spazio dunque o è minore de'segmenti AE, EB, CF, FD, o non minore. Suppongasi primieramente non minore di quelli. E perchè la superficie cilindrica troncata dalle linee rette AC, BD, e la superficie de'parallelogrammi ACFE, BDFE, che hanno le basi AE, EB, e la

stessa altezza del cilindro, ed i triangoli AEB, CFD, hanno lo stesso termine, cioè il parallelogrammo ABDC, ed entrambe sono concave verso la stessa parte, sarà la superficie cilindrica troncata dalle linee rette AB CD, insieme colle porzioni de'cerchi AEB, CFD maggiore della superficie composta dai parallelogrammi ACFE, EFDB, che hanno la stessa altezza del cilindro, e de'triangoli AEB, CFD: tolti ad ambe le parti i comuni triangoli AEB, CFD, la rimanente superficie cilindrica troncata dalle linee rette AB, CD, insieme co'segmenti de'cerchi AE, EB, EF, FD, sarà maggiore della superficie de'parallellogrammi ACFE, BEFD. Ma questi due parallelogrammi sono uguali al parallelogrammo ACDB insieme collo spazio G. Adunque tolta da queste due lo spazio G, dà quelle i segmenti, che sono minori di G, rimarrà la superficie cilindrica maggiore del parallelogrammo ABDC.

Sia in secondo luogo lo spazio G minore de'segmenti AE, EB, CF, FD, e si dividano per metà gli archi AE, EB, CF, FD, e così CF, FD nè punti H, K, L, M, e si congiungano le rette AH, HE, EK, KB, CL, LF FM, MD, e così si continui, finchè si giunga a de'segmenti, che uniti siano minori di G. Dimostreremo similmente che i parallellogrammi, che hanno le basi AH, HE e la stessa altezza che il cilindro, siano maggiori de'parallelogrammi, che hanno le basi AE, EB, e la stessa altezza del cilindro. Ora la superficie cilindrica troncata dalle rette AC, DB, insieme co'segmenti AEB, CFD avendo per termine il parallelogrammo ACDB; e lo stesso termine hanno i parallelogrammi, che

poggiano sulle basi AH, HE, EK, KB, della stessa altezza del cilindro, co' i rettilinei AHE, EKB, CLF, MDF, ed essendo concave verso la stessa parte, e la cilindrica superficie comprende la rettilinea, sarà la comprendente maggiore della compresa. Se dunque dalla superficie cilindrica, co' segmenti AEB, CFD, e dai parallelogrammi delle basi AH, HE EK, KB, insieme co' rettilinei AHEKB, CLFMD si tolgano cotesti rettilinei di comune, la rimanente superficie cilindrica unita a' segmenti AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD, sarà maggiore de' parallelogrammi delle basi AH, HE, EK, KB, e dell'altezza stessa del cilindro. Ma queste superficie pocanzi si sono dimostrate maggiori de' parallelogrammi AF, FB, eqealti che il cilindro, e queste sono uguali al parallelogrammo ACDB insieme collo spazio G. Adunque la superficie cilindrica compresa fra le rette AC, DB, insieme co' segmenti AH, HE, EK, KB, CL, LF, FM, MD sarà maggiore del parallelogrammo ACDB collo spazio G: tolgasi da questo G, e da quella i segmenti, e sono questi minori di G, rimarà la superficie cilindrica fra AC, BD maggiore del parallelogrammo ABCD.

Laonde se si conducano da due punti ec. C. B. D.

Corol. Se dentro del cilindro retto s'iscriva un prisma di lati uguali, la superficie cilindrica, senza la base, è maggiore della superficie del prisma.

TEOR. X. PROP. X.

Se nella superficie di un cilindro retto si tirino due linee rette, e da' loro termini si tirino le tangenti al cerchio base del cilindro, le quali siano nello stesso piano del cerchio, e coteste tangenti concorrano ad un punto: i parallelogrammi descritti sulle tangenti, e della stessa altezza del cilindro sono maggiori della superficie cilindrica contenuta dalle due linee rette tirate sulla superficie del cilindro.

Sia il cerchio AHC (*fig. 70.*) la base di un cilindro qualunque, e siano nella superficie cilindrica due linee rette, i cui termini siano A, C, e da questi termini siano tirate due tangenti al cerchio, e nel medesimo piano con esso, le quali concorrano nel punto G, e dai termini delle rette nella cima del cilindro, si tirino altre due tangenti al cerchio; e nell' istesso piano con esso e concorrenti verso la stessa parte delle altre. Dico che i parallelogrammi che hanno le basi AG, GC, e l' altezza stessa del cilindro cioè AP, PC, siano maggiori della superficie cilindrica racchiusa dalle linee tirate su di essa, e dagli archi AHC, BQM.

Imperocchè diviso l' arco AHC per metà in H, e da esso si tiri la tangente EHF, che si distenda dall' una parte, e dall' altra, fino ad intersegare le tangenti AG, GC ne' punti E, F; e da' punti E, F si innalzino due linee rette, che siano parallele all' asse del cilindro, fino alla cima di esso, che è il cerchio opposto alla base. Saranno i parallelogram-

mi descritti su di AG, e GC, e dalla stessa altezza del cilindro, maggiori degli altri constituiti sulle basi AE, EF, FC, e della stessa altezza che i primi. Perchè essendo EA uguale ad EH, CF uguale a HF, le due AE, CF saranno ugnali ad EF: aggiungansi di comune le due GE, GF, saranno le GA, GC maggiori delle AE, EF, FC, e però i rettangoli delle basi GA, GC sono insieme maggiori di que'delle basi AE, EF, FC, e insieme della stessa altezza. Ora l'eccesso de'rettangoli di AP, PC sopra quelli di AN, NF, FM sia dinotato dallo spazio K: la metà di questo o è maggiore de' trilinei AEH, HFC, o non è maggiore. Sia primieramente maggiore. E perchè le superficie de'parallelogrammi ABNE, ENOF, OMCF insieme co'rettilinei AEFC, BNOM, e la superficie cilindrica racchiusa fra le BA, ed MC, e gli archi AHC, BQM insieme co'segmenti AHC, BQM sono concavi verso la stessa parte, ed hanno per termine comune le linee BA, MC, AC, BM, saranno quelle maggiori di queste; laonde tolto di comune alle basi i segmenti AHC, BQM, rimarranno i parallelogrammi ABNE, ENOF, CMOF co'trilinei AEH, HFC, BNQ, QOM maggiori della superficie cilindrica racchiusa dalle rette AB, MC, e dagli archi AHC, BQM. Ma i rettangoli ABNE, ENOF, OFCM, insieme co'trilinei AEH, HFC, BNQ, QOM sono minori de'rettangoli ABPG, CMPG, poichè questi furono posti uguali a que'rettangoli insieme collo spazio K, ed i trilinei sono minori di K. Laonde si conchiude, che la superficie de'rettangoli ABPG, PMCG sia maggiore della superficie cilindrica sopradetta.

Sia in secondo luogo la metà dello spazio K non maggiore de' trilinei, e si dividano gli archi continuamente per metà, e tirando tangenti, che ne tolgano delle porzioni maggiori della metà, finchè si pervenga a dei trilinei minori della metà di K, e poi si continui la dimostrazione, come nel caso precedente, e si verificherà l'assunto.

Per la qual cosa, se ec. C. B. D.

Corollario. Se si circoscriva al cerchio base del cilindro un poligono, e poi si innalzi su di esso una figura solida compresa da parallelogrammi, la superficie della circoscritta, senza le basi, sarà maggiore della superficie cilindrica, senza le basi.

TEOR. XI. PROP. XI.

La superficie del cilindro senza le basi è uguale ad un rettangolo, di cui un lato intorno all'angolo retto è uguale al lato del cilindro, l'altro alla circonfereaza di una delle basi.

Sia il cerchio ABCD (*fig.* 71) la base di un cilindro, VY il suo asse, che rappresenta un suo lato. Dico che la superficie di tal cilindro, senza le basi, sia uguale al rettangolo PQRS, di cui il lato PQ intorno all'angolo retto sia uguale ad VY, l'altro QR uguale alla circonferenza ABCD della base.

Imperocchè se ciò non sia, la superficie del cilindro o sarà maggiore del rettangolo PQRS, o minore di esso. Sia primieramente maggiore; e nel cerchio ABCD si inscriva il quadrato ABCD, e si dividano continuamente per metà gli archi sottesi dai lati di esso,

e si continui. Di poi si ergano su tali poligoni dei prismi egualmente alti, che il cilindro, e tanti se ne alzino, finchè si pervenga ad un prisma, la cui superficie sia maggiore di quella del rettangolo PQRS. Sia un tal prisma quello che si costituisce dal poligono EAFBGCHD. Sarà la superficie di cotesto prisma uguale ad un rettangolo contenuto da una linea retta uguale al perimetro del poligono, e dall'altra uguale al lato stesso del cilindro. Ora il perimetro della base di cotesto prisma essendo minore della circonferenza del cerchio ABCD, la quale è uguale al lato QR del rettangolo, ed essendo l'altezza del prisma uguale a PQ, sarà la superficie del prisma minore del rettangolo: ma n'è maggiore, il che è assurdo.

Sia la superficie cilindrica minore del rettangolo PQRS; e si circonscriva al cerchio ABCD il quadrato MNGL, e su di esso si erga un prisma egualmente alto, che il cilindro, sarà la superficie di cotesto prisma maggiore di quella del cilindro perchè quella comprende questa.

Laonde se si dividano per metà gli archi EF FG, GH, HE, e si tirino le tangenti a questi punti, sul poligono formato si ergano dei prismi alti come il cilindro, e ciò si continui, fino a che la superficie del prisma a base poligona sia minore del rettangolo PQRS. Il che può effettuirsi. S'innalzi, e sia quello che si faccia sul poligono KOPQRSTZ. Sarà la superficie di cotesto prisma uguale al rettangolo contenuto dalla linea retta uguale al di lui perimetro, e da uno dei lati dei rettangoli, che lo circondano: sarà dunque questo rettangolo minore di PQRS; ed

essendo l'altezza PQ comune ad entrambi come lato del cilindro, sarà il perimetro del poligono minore delle base QR, ma questa è uguale alla circonferenza ABCD. Dunque quel perimetro sarà, minore di questa circonferenza, il che è assurdo.

Dunque non può essere la superficie del cilindro minore di quel rettangolo. E si è dimostrato non potere essere maggiore. Segue, che le sia uguale.

Adunque la superficie cilindrica senza le basi è uguale C. B. D.

Corol. Si tagli QX uguale al raggio della base del cilindro, e si prolunghi PQ in Y, finchè PQ sia uguale a PY, e si tirino XR, YR. Sarà il triangolo XQR uguale al cerchio base del cilindro (*prop. 5. Arch.*), ed RQY uguale a PQRS, e quindi alla superficie cilindrica. Ed essendo il triangolo QRY ad XQR come QY a QX.

Sarà la superficie cilindrica alla sua base, come il doppio lato al raggio della base.

Scolio. Se si prenda una media proporzionale tra il lato del cilindro, e 'l diametro del cerchio base di esso cilindro, il cerchio descritto dal raggio uguale a tale media proporzionale sarà uguale alla superficie del cilindro.

Imperocchè si chiami X (*fig. 72.*) cotesta media, ed il rettangolo AC sia contenuto da AB, e BC, delle quali AB sia il lato del cilindro BC la circonferenza della base, e si tagli EB uguale al diametro della base, e si compia il rettangolo EC. Essendo AB, ad X, come X a BE, sarà come AB a BE, così il quadrato di X al quadrato di EB, ovvero come il cerchio del raggio X a quello del rag-

gio EB, (*prop. 1 XII.*). Ed AB sta a BE come il rettangolo AC al rettangolo EC. Ma la circonferenza BC è metà della circonferenza del raggio EB, essendo EB doppio del raggio della base, e le circonferenze sono come i raggi (*prop.6. Arch.*). Laonde il cerchio del raggio EB è uguale al rettangolo di esso raggio nella metà della sua circonferenza, ossia uguale al rettangolo EBCF. Dunque sarà AC, ad EC come il rettangolo di X nella metà della sua circonferenza al rettangolo di EB in BC; onde AC sarà uguale al rettangolo di X nella metà della sua circonferenza. (*prop. 14. V.*).

Laonde la superficie cilindrica è uguale pure ad un cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra il lato del cilindro, e'l diametro della sua base.

TEOR. XII. PROP. XII.

La superficie del cono retto, senza la base è uguale ad un triangolo rettangolo, di cui un lato di que' che contengono l'angolo retto è uguale al lato di esso cono, e l'altro alla circonferenza del cerchio, che li è di base.

Sia il cono ABCDV (*fig. 73*), di cui la base sia il cerchio ABCD, V il vertice, e 'l triangolo rettangolo PQR, il cui lato PQ che contiene l'angolo retto sia uguale al lato del cono, e l'altro QR alla circonferenza del cerchio ABCD base di esso cono. Dico la superficie del cono ABCDV essere uguale al triangolo PQR.

Imperocchè se la superficie del cono ABCDV non è uguale al triangolo PQR, o sarà maggiore, o minore. Sia primieramente maggiore, e s'inscriva nel

cerchio il quadrato ABCD, e sopra di esso si alzi una piramide dello stesso vertice del cono, e poi divisi per metà gli archi AB, BC, CD, DA, congiungansi le corde, e sull'emergente poligono si alzi una piramide dello stesso vertice del cono, e dividendo sempre gli archi per metà, si continui ad iscrivere poligoni, ed innalzare su di essi piramidi, finchè si pervenga ad una piramide, la cui superficie sia maggiore del triangolo PQR (*Lem. alla prop. 2. XII*). E perchè la superficie della piramide iscritta nel cono è uguale ad un triangolo, che ha per base una retta uguale al suo perimetro, che è minore della circonferenza ABCD; e per altezza l'altezza di uno de' triangoli che chiudono la piramide, che è pure minore del lato del cono (*prop. 3. Arch.*), sarà questo triangolo maggiore di PQR; ma è minore per essere sì la base, che l'altezza di quello minore di quella del triangolo PQR. Il che è assurdo. Dunque la superficie del cono ABCDV no[n] è maggiore del triangolo PQR. Dico ne anche esse[r] minore.

Perocchè se può essere sia minore, e si circoscri[va] al cerchio ABCD un quadrato, e si erga su di es[so] una piramide alta come il cono. Sarà la superfic[ie] di questa maggiore di quella del triangolo, p[er] essere il perimetro della base di questa maggi[ore] della QR base del triangolo, che rappresenta la c[ir]conferenza ABCD (*prop. 2 Arch.*). Adunque di[vi]dendo continuamente gli archi fra i lati del q[ua]drato, ed ergendovi delle piramidi, e si faccia se[m]pre, finchè si pervenga ad una, la cui superfi[cie] sia minore del triangolo PQR. Sia quella, che

alza sul poligono KLMNOPQR. Ed essendo la superficie di questa uguale ad un triangolo la cui base è uguale al perimetro del poligono, e l'altezza uguale all'altezza di uno de' triangoli, che comprende la piramide, sarà questo triangolo minore del triangolo PQR, ma ne è maggiore, per essere la base di qual triangolo maggiore di QR, che uguaglia la circonferenza. Il che è assurdo. Dunque la superficie del cono ABCDV non è minore del triangolo PQR, e si è dimostrato non essere maggiore. Dunque è uguale.

Laonde la superficie del cono ec. C. B. D.

Corol. Si tagli GQ uguale al raggio del cerchio base del cono, e si unisca GR. Sarà il triangolo GQR uguale a quel cerchio (*prop.5 Arch.*). Onde siccome PQR sta ad EQR, così PQ ad GQ (*prop.1.VI.*). *Sarà la superficie del cono alla sua base come il lato del cono al raggio di essa base.*

Scolio. Se si prende fra il lato del cono, e 'l raggio della base una media proporzionale, e con questa, come raggio, si descriva un cerchio. Sarà cotesto cerchio uguale alla superficie del cono, senza la base. Imperocchè sia M cotesta media proporzionale. Sarà PQ ad M, come M a GQ, e quindi (*def. 10 V. Ele.*) PQ a GQ in duplicata ragione di M a GQ, ovvero come il cerchio del raggio M a quello del raggio GQ (*prop. 2 XII.*). Ma PQ è a GQ come il triangola PQR al triangolo GQR, sarà il triangolo PQR al triangolo GQR, come il cerchio del raggio M a quello del raggio GQ. Ma il triangolo GQR è uguale al cerchio del raggio GQ. Dunque il triangolo PQR è uguale al cerchio del raggio M. Ed è

PQR uguale alla superficie del cono. Dunque la superficie del cono è uguale al cerchio del raggio M.

Laonde la superficie del cono è uguale ad un cerchio, il cui raggio è medio proporzionale tra il lato del cono, e 'l raggio della sua base.

TEOR. XIII. PROP. XIII.

Ogni cono retto è uguale ad una piramide la cui base è uguale al cerchio base del cono, e l'altezza uguale a quella del cono.

Sia il cono ABCDV, (*fig.* 74), e la piramide HKRY, la cui base HKR sia uguale al cerchio ABC, e l'altezza uguale a quella del cono. Dico il cono essere uguale alla piramide.

Se il cono non è uguale alla piramide, le sarà maggiore, o minore. Sia primieramente il cono maggiore della piramide, e s'iscrivano nella base del cono tanti poligoni, e tante piramidi si ergano della stessa altezza, finchè si giunga ad iscrivere nel cono una maggiore della piramide HKRY. Avendo questa la stessa altezza, saranno come le basi, perciò il poligono iscritto nel cerchio base del cono sarà maggiore del triangolo HKR; ma questo è uguale al cerchio base del cono. Dunque il poligono iscritto è maggiore al cerchio in cui è iscritto, ciò che ripugna.

Sia ora il cono minore della piramide. E si costituisca una piramide della stessa altezza del cono, la cui base o tocchi coi suoi lati il cerchio, o lo comprenda, e sia minore della piramide HKRY. Sarà la base della costrutta piramide minore di HKR,

avendo la stessa altezza fra loro, e quindi del cerchio ABCD, che è assurdo, essendo questo compreso da quella. Non è dunque il cono minore della piramide IIKRY; e si è dimostrato non essere maggiore. Dunque è uguale.

Laonde ogni cono è uguale ec. C. B. D.

Corol. Apparisce da ciò che la solidità del cono potrà similmente, come la piramide, valutarsi in grandezze discrete, come in piedi cubici, o palmi, moltiplicando la base del cono per la terza parte dell'altezza; e siccome la base del cono è cerchio, così dipende la solidità del cono dalla quadratura del cerchio, che si ha co' metodi di approssimazione, como eseguiremo appresso, trattando della misura del cerchio. Ed essendo il cilindro triplo del cono che ha la stessa base, e la medesima altezza, si otterrà la solidità del cilindro moltiplicando la base per l'altezza.

TEOR. XIV. PROP. XIV.

Se un cono equilatero si seghi con un piano parallelo alla base, la superficie conica frapposta ai piani paralleli sarà uguale ad un rettangolo contenuto dal lato del cono troncato verso la base, e dalla metà delle circonferenze dei due cerchi paralleli.

Sia il cono equilatero ABCDE (*fig. 75*), la cui base sia il cerchio ABC, il vertice E, il triangolo rettangolo EOA sia il generatore del cono ABCDE e si seghi tal cono col piano MNR parallelo alla

base ABC, che farà la sezione un cerchio (*def. 18 XI.*). Dico la superficie conica tra MNR, ed ABCD essere uguale al rettangolo contenuto da una retta uguale alla metà delle circonferenze ABC, MNR, e dal lato MA ad essi piani paralleli frapposto.

S'innalzi dal punto A al lato EA del cono la perpendicolare AK, la quale si ponga uguale alla circonferenza ABCD, e si unisca EK. Sarà il triangolo EAK uguale alla superficie del cono ABCDE (*prop. 12 Arch.*), e dal punto M si tiri MH parallela ad AK. Sarà questa uguale alla circonferenza RNM. Imperocchè essendo EM, ad EA, come MH ad AK pe' triangoli simili EMH, EAK, e per gli altri triangoli EMG, EAO, EM ad EA, come GM ad OA. Sarà (*prop 11. V.*) GM, ad OA, come MH ad AK: ma i raggi dei cerchi sono come le circonferenze loro. Sarà GM ad OA, come MH ad AK; ed AK è ugnale alla circonferenza ABCD. Dunque MH sarà uguale alla circonferenza MNR, quindi il triangolo EMH è uguale alla superficie del cono MNE (*prop. 12 Arch.*). Ed essendo EAK uguale alla superficie dell'intero cono ABCDE, sarà il trapezio MAKH uguale alla superficie del cono troncato ABCDMNR. Si unisca MK. Sarà il trapezio MAKH uguale ai due triangoli MAK, MKH, i quali, avvegnacchè equealti, saranno uguali ad un sol triangolo dell'altezza comune MA, e della base uguale alle due MH, AK, che sono uguali alle circonferenze ABCD, MNR, e questo triangolo essendo uguale al rettangolo contenuto dalla MA, e dalla metà delle MA, AK base di esso sarà cotesto rettangolo uguale alla superficie conica tra i piani paralleli ABCD, MNR.

Adunque se un cono si seghi con un piano parallelo ec. C. B. D.

Scolio: I. Dividasi MA per metà in X, e si tiri XY parallela alle OA, GM, ed MT parallela alla GO, sarà XY metà delle OA, GM. Imperocchè essendo le GM VY, OT uguali fra loro, saranno le OT, e GM doppie di VY. Ma pei triangoli simili MVX, MTA, MA essendo doppia di MX, sarà anche AT doppia di VX, onde OA, e GM saranno doppie di XY: ed essendo le circonferenze come i loro raggi, sarà la circonferenza del raggio XY metà delle circonferenze ABCD, MNR. Per la qual cosa essendosi dimostrato la superficie del cono fra i piani paralleli ABCD, MNR uguale al rettangolo contenuto dal lato troncato MA, e dalla metà delle circonferenze ABCD, MNR, sarà la stessa superficie uguale al rettangolo contenuto dallo stesso lato MA, e dalla circonferenza di quel cerchio, il cui raggio è la linea tirata dal punto medio X di MA parallela alle OA, e GM, e distesa sino all'asse del cono.

Laonde la superficie di un cono troncato è uguale ad un rettangolo contenuto dal lato del cono troncato, e dalla circonferenza del cerchio, che dal punto mrdio di esso lato si conduce parallelo ai piani opposti.

Scolio. II. Prendasi una media proporzionale H fra il lato MA, e la somma dei raggi OA, e GM, cosicchè sia MA ad H, come H ad OA, e GM: ed essendo i raggi come le loro circonferenze, sarà MA ad H, come la circonferenza di H alle circonferenze dei raggi OA, GM, e queste essendo come le loro

metà. Sarà MA ad H, come la metà della circonferenza di H alla metà delle circonferenze delle OA, GM, ossia della circonferenza YX. E quindi il rettangolo di MA e della circonferenza di XY eguaglia quello della metà della circonferenza di H, e del raggio H ed essendo quel rettangolo uguale alla superficie del cono troncato (*scol. prec.*), sarà il rettangolo di H, e della metà della sua circonferenza uguale alla medesima superficie. Ma il rettangolo contenuto dal raggio H, e dalla metà della circonferenza del suo cerchio è uguale al cerchio del raggio H (*prop. 5 Arch.*).

Dunque la superficie conica fra i piani paralleli è uguale al cerchio, il cui raggio è medio proporzionale fra il lato troncato del cono, e la somma de due raggi degli opposti cerchi.

TEOR. XV. PROP. XV.

Se vi siano due coni equilateri, e sia la superficie di uno uguale alla base dell'altro e l'altezza del primo uguale alla perpendicolare condotta dal centro della base del secondo sopra un suo lato, quei due coni saranno uguali fra loro.

Siano due coni equilateri ABC, DEF (*fig. 76*) e pongasi la base del cono ABC uguale alla superficie DFE, e l'altezza CG sia uguale alla perpendicolare HK, che dal centro H della base si conduce perpendicolare ad uno dei lati del cono DEF, che sia DF. Dico questi due coni essere fra loro uguali.

Perchè dunque la base del cono ABC pareggia la

superficie del cono DEF, e grandezze uguali hanno ad una terza egual ragione: sarà come la base BA alla base DE, così la superficie DEF alla sua base. Ma come la superficie alla propria base, così sta FD, ad DH, e pei triangoli simili FDH, FKH, FD ad DH, come FH ad HK, ed è HK uguale ad CG. Dunque come la base del cono ABC alla base di DEF così l'altezza di questo all'altezza di quello. Reciprocandosi dunque in cotesti coni le basi colle altezze, essi saranno eguali (*prop. 15 XII.*).

Laonde se vi siano due coni equilateri ec. C.B.D.

TEOR. XVI. PROP. XVI.

Ogni rombo conico composto di coni equilateri è uguale a quel cono, la cui base pareggia la superficie di uno dei coni componenti il rombo conico, e l'altezza uguale a quella linea, che dal vertice dell'altro cono conducesi perpendicolare a qualunque lato dell'altro cono.

Sia il rombo composto di due coni equilateri ABCD (*fig. 77*), la cui base sia il cerchio descritto intorno al diametro BC, e l'altezza AD. Espongasi l'altro cono GHK, che abbia la base uguale alla superficie del cono ABC, e l'altezza eguale alla linea DF, che dal punto D si conduce perpendicolare al lato AB; l'altezza poi del cono GHK sia HL: e sia HL uguale a DF. Dico, che il cono uguagli il rombo.

Espongasi anche l'altro cono MNX che abbia la base uguale alla base del cono ABC, e l'altezza uguale alla AD e sia tale altezza NO. Perchè

dunque NO è uguale alla AD, sarà perciò come NO a AE, così AD ad AE. Ma come AD ad AE, così il rombo ABCD al cono ABC, perciocchè essendo i due coni ABC, DBC della stessa base BC, saranno come le altezze DE, EA, onde componendo sarà rombo ABCD a cono ABC, come DA ad AE. Siccome poi NO a AE, così il cono MNX al cono ABC; essendo le loro basi uguali. Dunque come il cono MNX al cono ABC, così il rombo ABCD al cono ABC. Laonde il cono MNX è uguale al rombo ABCD; similmente perchè la superficie di ABC è uguale alla base di GHK. Adunque come la superficie del cono ABC alla sua base, così la base di GHK alla base di MNX. ma come la superficie del cono ABC è alla sua base, così AB, a BE, che è lo stesso di AD a DF, per essere i triangoli ABE, ADF simili; perciò come la base di GHK alla base di NMX, così AD a DF. È poi AD eguale ad NO, per supposizione, e DF eguale ad HL: onde come la base di GHK alla base di MMX, così l'altezza NO all' altezza HL. Adunque i coni GHK, ed MNX hanno le basi reciprocamente proporzionali alle altezze: perciò questi coni sono eguali. Si è dimostrato il cono MNX essere uguale al rombo ABCD. Laonde anche il cono GHK necessariamente è uguale al rombo ABCD.

Adunque ogni rombo composto di due coni equilateri, ec. C. B. D.

TEOR. XVI. PROP. XVI.

Se il cono equilatero sia segato da un piano parallelo alla sua base, e dal cerchio prodotto nella sezione si descriva in giù un cono, che abbia il suo vertice allogato nel centro della base del primo cono, il rombo conico, che risulta da questo, e dall'altro cono superiore, se si tolga da tutto il cono di prima, il rimanente solido è uguale ad un cono, che ha la base uguale alla superficie racchiusa tra i piani paralleli, e l'altezza uguale alla perpendicolare, che dal centro della base del primo cono si conduce ad ognuno dei suoi lati.

Sia il cono equilatero ABC (*fig.* 78), il quale sia segato da un piano parallelo alla di lui base. Sia DE cotesta sezione, ed F il centro della base; e dal cerchio, il di cui diametro è DE descrivasi il cono, il cui vertice sia F: così si ha il rombo BDFE constituito di due coni equilateri. Espongasi anche il cono KHL, la cui base sia eguale alla superficie, che tra AC, e DE si contiene, e l'altezza eguale alla perpendicolare FG condotta dal centro F sul lato AB. Dico adunque, che se dal cono ABC intendasi tolto il rombo BDFE, il solido che rimane, sarà uguale al cono HKL.

Espongansi similmente due coni MNX, OPR in modo, che la base di MNX sia uguale alla superficie del cono ABC, e l'altezza eguale ad FG. Perciò il cono MNX è uguale al cono ABC (*prop.* 15 *arch.*). E perchè la base del cono OPR si è posta

uguale alla superficie del cono DEB, e l'altezza uguale ad FG, il cono OPR è uguale al rombo BDFE (*prop. antec.*). E perchè la superficie del cono ABC componesi di BDE, e di quella, che è tra DE, ed AC: inoltre la superficie del cono ABC è uguale alla base del cono MNX: e la superficie del cono BDE è uguale alla base del aono OPR, quella poi, che è tra DE, ed AC eguaglia la base di KHL: segue, che la base di MNX sia uguale alle basi dei coni HKL, OPR. Ed essendo questi coni egualmente alti, sarà il cono MNX eguale ai coni HKL, OPR insieme presi (*prop.* 11. *XII.*). Ma il cono MNX è uguale al cono ABC, e'l cono OPR eguaglia il rombo BDEF. Adunque il rimanente cono HKL è uguale al solido, che resta nel primo cono toltone il rombo.

Laonde se un cono equilatero sia segato con un piano ec. C. B. D.

TEOR. XVIII. PROP. XVIII.

Se uno de coni equilateri onde è composto il rombo seghisi con un piano parallelo alla base: e dal cerchio prodotto nella sezione si alzi un cono al vertice dell'altro cono: dipoi da tutto il primo rombo tolgasi il rombo secondo, il rimanente solido eguaglia un cono, la cui base è uguale a quella superficie del cono, che è fra il piano segante, e la base, e l'altezza uguale alla perpendicolare, che si conduce dal vertice dell'altro cono ad un lato del primo.

Sia il rombo ABCD (*fig.* 79) composto di coni equilateri, ed uno di quei coni sia segato da un piano parallelo alla base, e si faccia la sezione EF, e dal cerchio il cui diametro è EF ergasi un cono, che ha il punto D per vertice, onde risulta il rombo EBFD, il quale s'intenda tolto da tutto il rombo. Espongasi il cono HKL, che abbia la base uguale alla superficie del cono racchiusa tra la base AC, e 'l piano segante EF, e l'altezza uguale alla perpendicolare DG, che dal punto D conducesi al lato BA. Dico dunque, che il cono HKL sia uguale al detto residuo.

S'intendano esposti cotesti due coni, cioè il cono MNX, ed OPR; e la base del cono MNX pongasi uguale alla superficie ABC, e l'altezza uguale a DG, sarà (*prop. 16 Arch.*) il cono MMX eguale al rombo ABCD: la base del cono OPR si ponga uguale alla superficie del cono EBF, e l'altezza eguale alla linea DG, similmente il cono OPR è uguale al rombo EBFD. Perchè dunque la superficie del cono ABC è composta della superficie del cono EBF, e di quella, che è tra i piani EF, AC. Inoltre la superficie del cono ABC è uguale alla base di MNX, e la superficie EBF eguaglia la base del cono POR, e quella che è tra i piani EF, AC è uguale alla base di HKL. Adunque la base di MNX è uguale alle basi dei coni OPR, HKL, e sono questi coni della stessa altezza, perciò il cono MNX è uguale ai coni HKL, OPR. Ma il cono MNX è uguale al rombo ABCD, e 'l cono OPR al rombo EBFD. Adunque il rimanente cono HKL sarà necessariamente uguale al residuo.

secondo una certa superficie conica la cui base, è il cerchio del diametro MG, e 'l vertice un punto nel concorso delle FG, MN nella linea AC; e così le linee BG, MD saranno prodotte secondo una conica superficie, che ha per base il cerchio del diametro BD perpendicolare al cerchio ABCD, e 'l vertice del cono similmente a qual punto ove s'incontrano le linee BG, DM tra loro colla linea AC, se si prolunghino. Lo stesso accade nell'altra parte del semicerchio in un modo inverso. Ciò posto la superficie dal solido inscritto nell'emisfero BGFANMD ha colla superficie della sfera lo stesso termine, che è il piano del cerchio di BD, e sono ambo le superficie cave verso la stessa parte, e la sferica abbraccia quella del solido, sarà quella maggiore della superficie di questo. Il che intendendosi per l'altro emisfero. Si conchiude essere la superficie sferica maggiore di quella dell'intero solido.

Laonde se nel cerchio massimo ec. C. B. D.

Corol. Segue da ciò che la superficie di un segmento sferico sia maggiore di quella del solido in esso inscritto.

TEOR. XX. PROP. XX.

Se ad un cerchio massimo della sfera si circonscriva un poligono di un numero pari di lati, ed esso cerchio si rivolga intorno al suo diametro, il poligono circoscritto al cerchio nella rivoluzione di questo genererà un solido, che sarà circoscritto alla sfera: la superficie di questo sarà maggiore di quella della sfera.

Sia nella sfera il cerchio massimo ABCD (*fig.* 81) intorno al quale si descriva una figura FNGMLPEO di molti lati uguali, e di numero pare, e si rivolga intorno al suo diametro fisso AC colla figura ad esso ABCD circonscritta. Dico che la superficie del solido generato in tal rivoluzione sia maggiore della superficie della sfera ABCD a cui è circoscritto.

Congiungasi la retta KH fra i contatti di due lati della figura circoscritta, Rivolgendosi il cerchio ABCD intorno ad AC, la KH movendosi anch' essa farà un cerchio perpendicolare al diametro AC. Questo sarà un limite tanto della superficie della porzione sferica KAH, quanto del solido KNGMH ad essa circoscritto; ed essendo quella superficie compresa da questa, sarà la prima minore della seconda. Lo stesso dimostrasi per ogni altro segmento sferico, e poi per l' emisfero.

Laonde se ad un cerchio massimo ec. C. B. D.

TEOR. XXI. PROP. XXI.

La superficie di una figura solida generata da un poligono di numero pari di lati inscritto nella sfera è uguale ad un rettangolo contenuto dal diametro della sfera, e dalla circonferenza di quel cerchio, che ha per raggio la perpendicolare che dal centro del cerchio massimo si abbassa sopra di un lato del poligono generante il solido poliedro inscritto nella sfera.

Sia ACBD (*fig.* 82) un cerchio massimo della sfera ACBD, e s' inscriva in esso un poligono di

numero pari di lati CKMBNLD, e rivolgasi cotesto cerchio col poligono intorno a BA diametro del cerchio. Dico essere la superficie del solido generato dal poligono uguale al rettangolo XY, di cui il lato XT uguagli il diametro BA del cerchio ACBD, e TY la circonferenza del cerchio che ha per raggio una delle perpendicolari, che dal centro E si abbassi sopra uno de' lati del poligono.

Si congiungano MN, KL, e sia CD un diametro, e dal centro E si abbassi su di un lato B N del poligono la perpendicolare EG, e biseeata NL in F, si tirino FH, NR perpendicolari alle BA, LK. Nel rivolgersi il cerchio intorno al suo diametro AB, il triangolo rettangolo BNQ genererà il cono NBM, la cui superficie è uguale ad un triangolo rettangolo, di cui un lato intorno all'angolo retto pareggia il lato BN del cono, e l'altro è uguale alla circonferenza del cerchio del raggio NQ (*prop. 12 Arch.*), ovvero al rettangolo di BG metà del lato BN, e della circonferenza stessa del raggio NQ (*prop 41 I*). Ma da' triangoli simili EBG, NQB si ha EG a GB, come NQ a QB, e permutando EG ad NQ, così GB a QB. Ma prendendo EG, ed NQ come raggi di due cerchi da descriversi, questi saranno come le loro circonferenze (*prop., 16 Arch.*). Sarà perciò la circonferenza di EG alla circonferenza di NQ, come GB a BQ. Laonde (*prop. 16 VI.*) il rettangolo de' termini estremi è uguale al rettangolo, che dai medj si contiene. Sarà perciò il rettangolo contenuto dalla circonferenza di EG, e dalla linea QB uguale a quello che dalla circonferenza di NQ, e dalla retta BG si contiene. Adunque il rettangolo conte-

nuto da BQ, e dalla circonferenza del raggio EG è uguale alla superficie del cono NBM, parte del solido inscritto nella sfera. Inoltre la superficie del cono troncato NLKM è uguale al rettangolo contenuto dal lato NL di esso cono, e dalla circonferenza del raggio FH tirato dal punto medio del lato NL parallelo alle NQ, LV raggi de' cerchi paralleli nel cono troncato (*scol. I. prop. 14 Arch.*). Ma abbassate le perpendicolari NR, FH sulle rette LK, BA, il triangolo rettangolo EFH è simile ad NFO, e quindi al suo simile NRL, per essere l'angolo retto EFN uguale a' due HFE, HEF, uguali anch'essi ad un retto: tolgasi il commne EFH, rimarrà HEF uguale ad OFN, e quindi il terzo ONF sarà uguale al terzo EFH. Laonde i triangoli EFH, FNO saranno simili, ed essendo NRL simile ad FNO, sarà EFH pur simile ad NRL, e per tal somiglianza sarà EF ad FH, come NL ad NR, e prendendo di nuovo EF, FH come raggi di cerchi da descriversi, saranno come le loro circonferenze. Quindi la circonfesenza di EF sarà alla circonferenza di FH, come la retta NL alla retta NR, e 'l rettangolo della circonferenza di EF, e di NR, ovvero QV sarà uguale a quello che dalla circonferenza di FH, e dalla retta NL si contiene: ma questo rettangolo pareggia la superficie conica tra piani paralleli LK, MN. Dunque quello sarà pure uguale a cotesta superficie. Onde la superficie del solido inscritto nel segmento KBL della sfera è uguale al rettangolo contenuto da BV, e dalla circonferenza di GE. Similmente si dimostra la superficie del solido fra LK, DC essere uguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza di ES, ov-

vero EG, e dalla VE. Ed essendo DBC semicerchio generatore della sfera, sarà la superficie del solido inscritto nell'emisferio CBD uguale al rettangolo del raggio BE, e della circonferenza di EG. E dimostrandosi similmente per l'altro emisferio, sarà l'intera superficie del solido inscritto nella sfera uguale al rettangolo del diametro BA, e della circonferenza del raggio EG.

Laonde la superficie di una figura inscritta ec.C.B.D.

Corol. Segue da ciò che la superficie del solido generato da corde uguali adattate in un segmento di cerchio rivolto intorno al diametro di esso sia uguale al rettangolo contenuto dall'altezza del segmento, e dalla circonferenza del cerchio descritto col raggio uguale alla perpendicolare abbassata del centro sopra una di quelle. Così la superficie del solido generato dalla porzione del poligono LNBMK incritto nel segmento LBK è uguale al rettangolo contenuto da BV altezza del segmento, e dalla circonferenza di EG.

Scolio. Sia il poligono FNGMLPEO di un numero pari di lati (*fig.* 81) circoscritto al cerchio ABCD, ed intorno ad esso si circoscriva un'altro cerchio, che avrà per diametro GE. Il poligono in tal caso si troverà inscritto nel cerchio GLEF, e la superficie del poliedro generato da esso sarà per la dimostrazione precedente uguale al rettangolo della GE, e della circonferenza del raggio TK.

TEOR. XXII. PROP. XXII.

La solidità del poliedro inscritto nella sfera colla rivoluzione del poligono di numero pari di lati intorno al diametro del cerchio massimo della sfera, che è contenuto da superficie coniche, uguaglia un cono, la cui base è uguale alla superficie dell'inscritto solido, e l'altezza è uguale alla perpendicolare abbassata dal centro della figura inscritta sopra un suo lato.

Sia la sfera, nella quale sia il cerchio massimo ABCD (*fig. 83*), ed in esso il poligono ANMDLKCIHBGF inscritto, che generi il solido contenuto da superficie coniche generate da NA, NM, MD, DL, LK, KC, CI, IH, HB, BG, GF, FA. Pongasi il cono PQRV, la cui base sia uguale alla superficie del solido inscritto nella sfera, e l'altezza VT uguale alla perpendicolare XE, che dal centro X della sfera si abbassi sopra un lato della figura in essa inscritta. Dico un tal cono pareggiare la superficie di quel solido.

Intendansi descritti i coni le cui basi siano i cerchi de' diametri NF, MG, HL, IK, ed i vertici siano allogati nel centro X della sfera. Si ha primieramente il rombo conico ANXF composto di due coni, i quali hanno la comune base nel cerchio del diametro NF, ed i vertici in A, ed in X. Cotesto rombo è uguale al cono che ha per base la superficie del cono NAF, e per altezza la perpendicolare XE (*prop. 16 Arch.*). Inoltre prolungate MN, GF in O, il residuo del rombo OMXG dal rombo ONXF

è uguale ad un cono la cui base pareggia la superficie conica tra i piani paralleli NF, MG, che è quella generata da MN, e per altezza la perpendicolare XE, che uguaglia quella che cade su di MN (*prop.* 18 *Arch.*). Similmente prolungando le MN, BG in Y il residuo del cono DBY, tolto il rombo conico MXGY, che è contenuto da' piani paralleli GM, BD, e dalla superficie del cono MGX, e dal cerchio, il cui diametro BD è uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie fra GM, BD, e l'altezza uguale alla perpendicolare, che dal centro X si abbassa sopra il lato DM, che è uguale a XE. Lo stesso si dimosrra per l'altro emisfero. Ed essendo i coni sopradetti uguali ad un sol cono che abbia la base uguale a tutte le indicate superficie, e l'altezza stessa. Dunque il solido inscritto in tal modo nella sfera ABCD è uguale al cono PQRV, la cui base PQR pareggia la superficie del solido, e per altezza VT uguale alla perpendicolare XE, che dal centro si abbassi sopra un suo lato. Laonde la solidità del poliedro inscritto ec. C.B.D.

TEOR XXIII. PROP. XXIII.

La superficie della sfera è uguale ad un rettangolo, i cui lati intorno all'angolo retto sono uguali l'uno al diametro della sfera, l'altra alla circonferenza di un suo cerchio massimo.

Sia la sfera generata dal cerchio ABDG (*fig.* 84), ed il rettangolo KMNL, il cui lato KM sia uguale alla circonferenza ABDG, e KL uguale al diametro

AE. Dico il rettangolo MNLK essere uguale alla superficie della sfera generata da esso cerchio.

Imperocchè se sia possibile, sia la superficie sferica maggiore, e s'inscriva nel cerchio ABDG un poligono di un numero pari di lati, il quale rivolgendosi intorno al diametro AE generi un solido, e si continui ad inscrivere altri poligoni, finchè sorga un poliedro, il quale sia quello generato dal poligono ABCDEFGH, la cui superficie sia maggiore del rettangolo KN, e si abbassi su di un suo lato dal centro la perpendicolare OP. Ed essendo la superficie di cotesto solido uguale al rettangolo contenuto dal diametro AE, e dalla circonferenza del raggio OP (*prop. 21 Arc.*). Sarà questo rettangolo maggiore di quello. Ora avendo essi la medesima base AE, saranno come le loro altezze, cioè la circonferenza del raggio OP sarà maggiore della circonferenza del raggio OA, la minore della maggiore, che è assurdo. Non è dunque la superficie della sfera maggiore del rettangolo KN. Dico nè anche essere minore.

Imperocchè sia minore la superficie della sfera ACEG, e si circoscriva al cerchio un poligono di un numero pari di lati, cominciando dal quadrato, e si replichi cotesta operazione, finchè si pervenga ad un tal poligono generatore di un solido circoscritto alla sfera, la cui superficie sia minore di quella del rettangolo KMNL, ed un tal solido sia quello generato dal poligono QOVSRTXY. Sarà la superficie di questo solido uguale ad un rettangolo, la cui base è uguale alla circonferenza del cerchio, che ha per raggio la perpendicolare abbassata dal

centro del cerchio generatore della sfera circoscritta al solido sul lato del poligono (*scol. prop. 21. Ar.*), e per altezza il diametro del cerchio circoscritto ad esso, come QR che è maggiore di AE. Laonde sarà cotesto rettangolo minore del rettangolo KMNL: ma essendo uguali le loro basi, cioè la circonferenza di OA, saranno come le altezze, cioè QR sarà minore di AE, la maggiore della minore, che è assurdo. Dunque la superficie sferica non è minore del rettangolo KN, si è dimostrata non essere maggiore. È necessario perciò che sia uguale.

Laonde la superficie della sfera è uguale ec. C.B.D.

Corol. Essendo la superficie del cerchio generatore della sfera uguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza, e dalla metà del raggio, e quella della sfera uguale al rettangolo della circonferenza e del diametro, saranno cotesti rettangoli nella ragione del diametro alla metà del raggio, per avere uguali gli altri due lati espressi dalla circonferenza. Onde la superficie sferica sarà a quella del cerchio generatore, come il diametro alla metà del raggio, cioè come 4 ad 1.

Laonde la superficie sferica è quadrupla del suo cerchio generatore.

Corol. 2. Ed essendo il cerchio che ha per raggio il diametro della sfera quadruplo del cerchio generatore (*prop. 4 II, e 2. XII.*). Sarà il cerchio che ha per raggio il diametro della sfera uguale alla superficie sferica.

TEOR. XXIV. PROP. XXIV.

La solidità della sfera è uguale ad un cono, la cui base è uguale alla superficie della sfera, e l' altezza uguale al raggio di essa.

Sia la sfera ACEG (*fig.85*), e 'l cono KLMN, la cui base KLM sia uguale alla superficie della sfera ACEG; e l' altezza ON uguale al raggio AH della sfera. Dico il cono essere uguale alla sfera.

Imperocchè non sia il cono KLMN uguale alla sfera ACEG, ma sia maggiore la sfera. Ed iscrivansi nella sfera de' solidi poliedri di numero pari di lati (*prop. 17 XII.*), finchè si giunga ad uno, la cui solidità sia maggiore di quella del cono KLMN. Sia un tale solido quello, che si genera dal poligono ADCFEPGQ iscritto nel cerchio ACEG. E poiche cotesto solido uguaglia un cono la cui base è uguale alla superficie del solido poliedro iscritto nella sfera, e per altezza la perpendicolare HX, che dal centro della sfera si abbassa sopra un lato del poligono (*prop.22 Arch*), laonde sarà questo cono maggiore del cono KLMN: ma è minore, per avera sì la base, che l' altezza minore di quella del cono KLMN: perocchè la base di questo cono essendo uguale alla superficie del solido inscritto, è minore della superficie sferica, e quindi di KLM, e l' altezza HX è minore di NO uguale a CA. Onde non è la sfera maggiore del cono.

Sia ora minore, e si circoscriva un poligono al cerhio ACEF generatore della sfera, che rivolto intorno al diametro AE faccia un poliedro circoscritto

alla sfera, e tanti se ne circoscrivano, finchè si giunga ad uno, la cui solidità sia minore di quella del cono KLMN. Ed essendo cotesto solido poliedro uguale ad un cono, la cui base pare ggia la sua superficie, e l'altezza il raggio della sfera (*sc. pr. 21, e pr. 22*), sarà questo cono minore del cono KLMN: ma è maggiore, come quello, che ha la base uguale alla superficie del solido maggiore di quello della sfera, il che è assurdo (*Prinč. 5*). Laonde non potendo essere la sfera nè maggiore del cono, nè minore, segue che le sia uguale.

Per la qual cosa la solidita della sfera è uguale ec. C. B. D.

CROLLARIO

Essendo la superficie sferica quadrupla del suo cerchio generatore, ovvero di qualunque suo cerchio massimo, e questa superficie essendo uguale ad un cerchio che abbia per raggio il diametro della sfera, sarà il cono, che ha per base cotesto cerchio e per altezza il raggio della sfera, di essa quadruplo del cono, che abbia per base il cerchio generatore, e per altezza il raggio, e siccome quel cerchio è quadruplo di questo, con ciò il cono secondo sarà la quarta parte del primo, come quelli, che avendo la stessa altezza sono come le basi.

Def. una grandezza dicesi sesquialtera di altra quando aggiunto a questa la sua metà, pareggia quella.

TEOR. XXV. PROP. XXV.

Se un cilindro abbia per base il cerchio massimo di una sfera, e l'asse sia uguale al diametro di esso cerchio, sarà la solidità di questo cilindro sesquialtero di quella della sfera; ed inoltre la superficie del cilindro una con quella delle due basi è pure sesquialtera della superficie di essa sfera.

Imperocchè il cilindro di simil fatta essendo triplo di quel cono, che abbia per base il cerchio generatore della sfera, e per altezza il diametro di essa (*prop. 10 XII*), sarà sestuplo di quel cono, che abbia lo stesso cerchio per base, e per altezza il raggio della sfera. Ma di questo cono è quadrupla la sfera, onde il cilindro è sesquialtero di essa sfera.

Inoltre la superficie di tal cilindro stando alla sua base come il doppio lato al raggio della sua base, ed essendo il doppio lato quadruplo del raggio della base per ipotesi, segue che la superficie cilindrica sia quadrupla di esso cerchio generatore. Ma la superficie sferica da tal cerchio generata è pure quadrupla di esso cerchio. Onde aggiunte le due basi alla superficie cilindrica, sarà la superficie cilindrica colle basi sestupla di una di esse, e la superficie sferica si è dimostrata quadrupla. Laonde la superficie cilindrica colle basi è sesquialtera della superficie della sfera.

Per la qual cosa la solidità del cilindro ec. C. B. D.

TEOR. XXVI. PROP. XXVI.

La superficie del segmento sferico è uguale al rettangolo, che ha per base la circonferenza del cerchio generatore della sfera, e per altezza l'altezza del segmento.

Sia la sfera ABCD (*fig. 86*), il cui diametro sia AC, BAD poi sia un suo segmento. Dico la superficie del segmento ABD essere uguale al rettangolo PQRS, il cui lato RQ rappresenti la circonferenza ABCD, RS l'altezza AE del segmento.

Imperocchè il rettangolo PQRS non sia uguale al segmento ABD, ma sia minore: e s' inscriva nel segmento del cerchio BAD tal poligono di un numero pari di lati, che rivolto intorno ad AC produca un solido che faccia la superficie maggiore del rettangolo PQRS. E poichè la superficie di un tal solido è anche uguale al rettangolo contenuto dall'altezza AE, e dalla circonferenza del raggio OP (*prop. 22*), sarà perciò il rettangolo di AE nella circonferenza di OP maggiore del rettangolo PQRS; per la qual cosa essendo cotesti rettangoli di uguali altezze, saranno come le basi, e sarà perciò la circonferenza del raggio OP maggiore della RQ: ma RQ è uguale alla circonferenza ABCD del raggio OA. Sarà dunque la circonferenza di OA minore di quella di OP, la maggiore della minore, il che è assurdo. Laonde la superficie del segmento BAD non è maggiore del rettangolo PQRS. Dico nè anche essere minore.

Perocchè se è possibile sia minore. Si circo-

scriva al segmento un poliedro di un numero pari di lati, tale, che la superficie di esso sia minore del rettangolo PQRS: ed essendo la superficie di cotesto solido uguale al rettangolo contenuto dalla circonferenza di OK uguale a quella di OA e dall'altezza XE. Sarà un tal rettangolo minore di PQRS: ma essendo le basi di questi due rettangoli uguali, come uguali ciascuno alla circonferenza ABCD, sarà l'altezza XE minore della AE, la maggiore della minore, che non può essere. Dunque la superficie del segmento sferico non è minore di PQRS, si è dimostrato non essere maggiore. Dunque è necessario, che sia uguale. Similmente la superficie del rimanente segmento sferico BCD è uguale al rettangolo della circonferenza ABC, e dell'altezza EC.

Laonde la superficie di qualunque segmento sferico ec. C. B. D.

Coroll. Essendo la superficie sferica uguale al rettangolo della circonferenza, e del diametro. Sarà la superficie della sfera a quella di un suo segmento, come il diametro della sfera all'altezza del segmento.

Così se vogliasi troncare da una sfera un segmento, che contenga di superficie il quinto della superficie sferica, diviso il diametro in cinque parti *(prop. 9 VI)*, e per l'estremo della quinta parte si conduca un piano perpendicolare al diametro, e si sarà ottenuto il segmento della superficie richiesta.

Corol. 2. E la superficie di un segmento sarà all'altra dell'altro segmento; come l'altezza dell'uno all'altezza dell'altro. Ed è chiaro anche il modo onde dividere la sfera in due segmenti, le cui su-

perficie siano in data ragione, il quale problema è piano, riducendosi a dividere il diametro nella ragion data (*prop.9 VI.*), e per il punto di divisione condurre un piano perpendicolare ad esso diametro, e sarà fatto il problema.

TEOR. XXVII. PROP. XXVII.

La superficie di un segmento sferico è uguale anche ad un cerchio, il cui raggio è uguale alla retta, che tirasi dal vertice del segmento ad un punto qualunque di quel cerchio, che è base del segmento.

Sia il segmento sferico ABD, (*fig.87*) il cui vertice sia A, e 'l cerchio che ha per diametro BD sia base di esso segmento, e si tiri BA dal vertice di esso ad un punto qualunque B della circonferenza della sua base. Dico il cerchio descritto dal raggio AB essere uguale alla superficie del segmento ABD.

Si abbassi dal punto B sul diametro AC la perpendicolare BE, e si tiri BC. Sarà pel triangolo rettangolo CBA CA ad AB, come AB ad AE (*prop. 8 VI.*), e quindi CA ad AE in duplicata ragione di CA ad AB (*def. 10 V*). Ma in duplicata ragione di CA ad AB, così è il cerchio del raggio AC a quello del raggio AB (*prop 2 XII*); e CA sta ad AE come la superficie della sfera ABCD alla superficie del segmento BDA (*cor. 2 prop.ant.*). Sarà dunque il cerchio del raggio AC al cerchio del raggio AB, come la superficie della sfera ABCD alla superficie del segmento BAD. Ma il cerchio del raggio AC è uguale

alla superficie della sfera. Dunque il cerchio del raggio AB eguaglia la superficie del segmento BAD (prop 14 5).

Laonde la superficie del segmento sferico è uguale ec. C. B. D.

TEOR. XXVIII. PROP. XXVIII.

Il settore sferico è uguale ad un cono, la cui base pareggi la superficie sferica presa dal settore, e l'altezza il raggio della sfera.

Sia il settore sferico ABCD (*fig.* 88) preso nella sfera ABCE. Dico essere uguale al cono QRSP, la cui base QRS sia uguale alla superficie del segmento ABC, e l'altezza PO uguale al raggio BD.

Se è possibile non sia il settore solido, o sferico ABCD uguale al cono QRSP, ma il settore sia maggiore, e s'iscrivano nel settore sferico ABCD de' solidi poliedri continuamente, finchè si giunga al solido AFBHCD, il quale sia maggiore del cono QRSP. E poichè il solido AFBHCD iscritto nel settore sferico ABCD è uguale ad un cono, la cui base è uguale alla superficie del poliedro AFBHCD, e l'altezza DK, che perpendicolarmente si abbassa dal centro della sfera sopra uno dei lati del poliedro. Sarà questo cono maggiore del cono QRSP, ma è minore, per essere la sua base minore della base QRS, che è uguale alla superficie del segmento ABC, e l'altezza minore di PO uguale al raggio, il che è assurdo. Non è dunque il settore ABCD maggiore del cono QRSP. Dico neppure essere minore.

Perocchè se ciò sia si circosrivano alla porzione sferica del settore della sfera poligoni, che rivolti intorno generino solidi poliedri, e tanti sene circoscrivano finchè si giunga ad uno, la cui solidità sia minore del cono QRSP. Ed essendo cotesto solido ciscoscritto, oppure esterno alla sfera uguale ad un cono, la cui base è uguale alla superficie del solido circoscritto, e l' altezza il perpendicolo abbassato dal centro della sfera sopra un lato del poliedro (*prop. 22 Arch.*), sarà questo cono minore di quello. Ma la base di questo cono, essendo uguale alla superficie del poliedro è maggiore della base del cono QRSP che rappresenta la superficie del segmento, che in quella si comprende, e l' altezza è uguale pure all'altezza PO, sarà il tutto minore della parte il chè è assurdo. Non è dunque il settore ABCD minore del cono QRSP, e si è dimostrato nè anche essere maggiore, dunque è uguale.

Laonde il settore sferico pareggia ec. C. B. D.

TEOR. XXIX. PROP. XXIX.

Ogni segmento sferico e uguale ad un cono, la cui base è uguale ad un cerchio, che ha per raggio l' altezza del segmento, e per altezza la rimanente porzione del diametro accresciuta del raggio della sfera.

Sia il segmento sferico BAE (*fig. 89*) troncato dalla sfera ABDE. Dico la solidità del segmento BAE essere uguale ad un cono, la cui base sia uguale al cerchio del raggio AC, altezza di esso segmento, e l'altezza la rimanente parte CD del diametro AD, accresciuta del raggio AO.

Si unisca il raggio BO, e la linea retta BA. Pel triangolo rettangolo BAC il quadrato di BA è uguale ai quadrati di BC, e di AC, ed essendo i cerchi come i quadrati de'raggi, o dei diametri (*prop.2 XII*) sarà il cerchio del raggio BA uguale a' cerchi de raggi BC, AC: per la qual cosa il cono, che ha per base il cerchio di BA, e per altezza il raggio AO della sfera è uguale a due coni, che hanno per base i cerchi BC, ed AC, e per altezza lo stesso raggio AO. Ma il cerchio del raggio BA pareggia la superficie sferica del segmento BAE (*prop. 27 Arch.*), ed il cono, che ha per base la superficie del segmento, e per altezza il raggio è uguale al settore sferico BAEO (*prop. antec.*). Dunque il settore sferico BAEO è uguale ai due coni, che hanno per basi i cerchi de' raggi BC, CA, e l' altezza il raggio AO Tolto il comune cono BEO, e sarà il segmento sferico BAE uguale a due coni, uno che ha per base il cerchio di BC, e per altezza AC, l'altro per base il cerchio di AC, e per altezza AO. Ma essendo AC a CB, come CB a CD (*prop. 8. VI.*), sarà AC, a CD in duplicata ragione di AC a CB, ovvero come il cerchio del raggio AC al cerchio del raggio BC, e quindi (*prop. 15 XI.*) il cono che ha per base il cerchio di BC, e per altezza AC è uguale al cono che ha per base il cerchio di AC, e per altezza CD. Laonde essendosi qui sopra dimostrato il segmento sferico essere uguale a due coni uno che ha per base il cerchio del raggio BC, e per altezza AC, l'altro che ha per base il cerchio di AC, e per altezza AO, sostituendo al cono del cerchio di BC, e dell'altezza AC il suo uguale, che è quello del cerchio di AC, e dell'altezza

CD, sarà il segmento sferico uguale a'due coni, uno che ha per base il cerchio AC e per altezza CD, l'altro per base AC stessa, e per altezza AO raggio della sfera, e quindi ad un solo cono che ha per base il cerchio di AC altezza del segment e BAE, e per altezza CD insieme con AO.

Laonde ogni segmento sferico è uguale ec. C. B. D.

FINE DEL LIBRO UNICO.

DELLA MISURA

DEL

CERCHIO.

DEFINIZIONI.

I. Una figura dicesi quadrata se per una geometrica costruzione possa il suo spazio ridursi ad un rettangolo, o quadrato.

Cotesta quadratura può essere esatta, o per approssimazione, esatta è quando lo spazio di una figura comunque irregolare riducesi ad uno spazio regolare, come ad un rettangolo, o quadrato, il che Euclide esegue nella 45. del lib. I., e nella 14. del II., e cotesta quadratura può darsi a tutte le figure rettilinee. La quadratura per approssimazione compete alle figure curvilinee, ad eccezione della Parabola, cui Archimede ridusse ad esatta quadratura col metodo de' limiti felicemente da lui inventato.

II. Una curva dicesi rettificata, quando la sua lunghezza si trasmuta in una linea retta, il che pure si esegue per approssimazione.

Scolio. I metodi, onde si può pervenire alla quadratura de' spazj curvilinei, ed alla rettificazione delle curve sono altri suggeriti dalla Geometria, altri dall'analisi sublime, noi seguiremo i primi, come quelli che agli elementi si convengono. A potervi facilmente pervenire premetterono due Lemmi terrematici dedotti da que' che il Gregori premise alla quadratura del cerchio, e delle curve coniche.

TEOR. I. PROP. I.

Se dentro di un cerchio s' iscriva un poligono di numero pari di lati, ed un altro simile se ne circoscriva : di poi se ne iscsiva un' altro di doppio numero di lati. Il secondo poligono inscritto è medio proporzionale fra il primo iscritto, e 'l circoscritto simile ad esso.

Sia un cerchio, di cui GDF è un segmento (*fig.90*) ed O sia il centro. S' inscriva un poligono regolare, di cui un lato sia GF, ed un'altro simile se ne circoscriva, che sia quello del lato AE, il quale si arresta fra i raggi OG, OF, che passano per gli estremi del lato GF del poligono iscritto. Unito il centro O col contatto D colla linea retta OD, si congiungano GD, DF. Sarà GD lato del poligono secondo inscritto a doppio numero di lati. Dico il poligono del lato GD essere medio proporzionale fra il poligono del lato GF, iniscritto nel cerchio, e 'l suo simile del lato AE circoscritto.

Essendo il poligono del lato AE simile a quello del lato GF, i triangoli AOE, GOF saranno simili

ancora simili fra loro (*prop. 20. VI*), onde sarà AE parallela a GF, e quindi la retta OD fra il centro, e 'l contratto sarà perpendicolare alla corda GF (*prop. 29 I*), e sarà pure la GF divisa per metà in H (*prop. 3. III.*). Dunque il triangolo GOH è uguale a OHF, AOD ad ODE, e GOD a DOF. Laonde il triangolo GOF, il quadrilatero OGDF, e'l triangolo AOE sono doppj de' tre GOH, GOD, AOD, ed i poligoni de' lati GF, GD, AE saranno egualmente moltiplici loro. E perchè il triangolo GOH è al triangolo GOD come la base OH alla base OD, per aver la stessa altezza; e 'l triangolo OGD è al triangolo ODA, come OG ad OA, ed OG è ad OA, come OH ad OD. Onde il triangolo OGH è al triancolo OGD, come OGD ad ODA (*prop. 11 V*). Adunque i tre triangoli OGH, OGD, ODA sono continuamente proporzionali, e tali saranno i loro doppj GOF, GOFD, AOE, e così i loro egualmente moltiplici. Per la qual cosa il poligono del lato GD è medio proporzionale fra il poligono del lato GF, inscritto, ed il suo simile del lato AE circoscritto. Adunque se dentro di un cerchio ec. C. B. D.

TEOR. II. PROP. II.

Se dentro di un cerchio s' inscriva un poligono di un numero pari di lati, ad un altro simile ad esso se ne circoscriva, e poi se ne iscriva un altro a doppio numero di lati, ed un' altro simile se ne circoscriva. Sarà l' ultimo poligono circoscritto quarto proporzionale in ordine alla somma de' due iscritti, al doppio del primo iscritto, ed al primo circoscritto simile al primo iscritto.

Sia un cerchio, di cui GDF è segmento (*fig.* 90) ed O il suo centro, e supposta la costruzione della prop. prec., cioè che GF sia il lato del poligono iscritto, AE quello del circoscritto simile a quello, GD il lato dell' altro iscritto a doppio numero di lati, e tirate da' punti estremi G, F le tangenti GB, FC, sarà BC il lato del poligono circoscritto simile a quello di GD di doppio numero di lati del poligono di GF. Imperocchè essendo BG uguale a BD, GO ad OD, BO comune, sarà il triangolo GOB uguale, e simile a BOD. Perciò i triangoli BDO, XDO sono simili perchè equiangoli. Onde il triangolo BOC è simile al triangolo GOD, e quindi il poligono del lato BC è simile a quello del lato GD. Dico che il poligono del lato BC è quarta proporzionale in ordine alla somma de' due del lato GF, e del lato GD, del doppio di quello del lato GF, e del circoscritto del lato AE simile al primo del lato GF.

Imperocchè supposti, come nell' antecedente proporzione, i triangoli GOH, GOD, il quadrilatero GODB, e'l triangolo AOD essere parti simili del triangolo GOF

del quadrilatere GOFD; del pentagono GOFCB, e del triangolo AOE, e questi de' loro poligoni inscritti, e circoscritti al cerchio, sarà il triangolo AOB al triangolo BOD, come AB a BD, per avere la stessa altezza: ma essendo diviso per metà l'angolo AOD AB è a BD come AO a DO, ed AO a DO è come OG ad OH pe' triangoli simili DOA HOG, ovverò come OD, ad OH, ed OD ad OH, come il triangolo GOD al triangolo GOH, essendo equealti, o come i loro doppj GOFD, GOF. Adunque sarà GOFD a GOF, come AOB a BOD, e componendo GOFD insieme con GOF a GOF, come AOD a BOD, e duplicando i termini della seconda ragione, sarà GOFD con GOF a GOF, come AOE a GOBD, e duplicando i conseguenti di quest' ultima proporzione sarà GOFD con GOF al doppio GOF, come AOB a GBCFO. E questi sono come i loro egualmente moltiplici.

Laonde se un cerchio ec. C. B. D.

PROBL. I. PROP. III.

Dato un cerchio ritrovare il quadrato che sia uguale ad esso.

Sia il cerchio DKMP (*fig. 90*). Fa d'uopo rinvenire il quadrato, che sia uguale al di lui spazio. Si prenda per unità di lunghezza il raggio KO del cerchio DKMP, sarà, moltiplicando per se stessa l'unità, anche espresso dall' unità il suo quadrato, con tal differenza però che questa unità seconda esprime spazio di due dimensioni, laddove

quella unità esprime una sola dimenzione. Laonde inscrivendo nel cerchio il quadrato, di cui un lato sia KM, il quale siccome è doppio del quadrato di KO (*prop.* 47. *I.*), sarà questo espresso dal 2, e circoscrivendo il quadrato ALNE, sarà espresso dal 4, essendo il quadrato KP doppio del quadrato di KM. Ma per la prop. I., inscrivando nel cerchio DKMP una figura di otto lati, questa è media proporzionale fra il quadrato inscritto, e'l circoscritto, la quale otterrassi moltiplicando le aje rispettive, che sono 2, e 4, e poi estraendo la radice quadrata, si avrà, spingendo l' approssimazione sino alla settima cifra decimale 2, 8284271, e da ciò che si è dimostrato nella proposizione seconda si otterrà l' aja dell'ottagono circoscritto, prendendo una quarta proporzionale in ordine alla somma delle aje del quadrato inscritto, e dell'ottagono inscritto, al doppio del quadrato inscritto ed al circoscritto, cioè facendo 4, 8284271: 4 :: 4 : ad un quarto, che sarà l'aja dell'ottagono circoscritto, la quale si ottiene moltiplicando il secondo termine pel terzo, e dividendo pel primo. Per la qual cosa replicando questa operazione fino ai poligoni di 32768 lati inscritti, e circoscritti, si otterrà per l'iscritto il numero 3, 1415926, pel circoscritto il numero 3, 1415926. E considerando il cerchio come poligono di doppio numero di lati, sarà (*prop.* 1,) medio proporzionale tra essi, e quindi uguale a ciascuno, vale a dire l'aja del cerchio si confonde coll'aja di ciascuno di essi poligoni.

Laonde dato il cerchio DKMP si è ridotto ad un

quadrato espresso del numero 3, 1415926, il cui lato è la radice quadrata di esso numero. C. B. F.

TAVOLA DEL CALCOLO DELL' AJA DE' POLIGONI INSCRITTI, E CIRCOSCRITTI.

Numero de' lati	Poligoni inscritti	Poligoni circoscritti
4. . . .	2,0000000. . .	4,0000000
8. . . .	2,8284271. . .	3,3137085
16. . . .	3,0614674. . .	3,1825979
32. . . .	3,1214451. . .	3,1517249
64. . . .	3,1365485. . .	3,1441184
128. . . .	3,1403311. . .	3,1422236
256. . . .	3,1412772. . .	3,1417504
512. . . .	3,1415138. . .	3,1416321
1024. . . .	3,1415729. . .	3,1416025
2048. . . .	3,1415877. . .	3,1415951
4096. . . .	3,1415914. . .	3,1415933
8192. . . .	3,1415923. . .	3,1415928
16384. . . .	3,1415925. . .	3,1415927
32768. . . .	3,1415926 . .	3,1415926

Cor. Il cerchio sta al quadrato circoscritto, come 3,1415928: 4, il quale rapporto è presso a poco uguale ad 11/14 ritrovato da Archimede, e ciò si conoscerà riducendo a decimali il fratto 11/14.

PROBL. II. PROP. IV.

Data l'espressione dell'aja del cerchio, ritrovare il numero che esprime la lunghezza della circonferenza: inoltre la ragione del diametro alla circonferenza.

Sia dato il numero 3,1415926, che esprime l'aja del cerchio, ritrovare la di lui perferia.

Perchè l'aja del cerchio è uguale al rettangolo che si contiene dalla circonferenza di esso, e dalla metà del raggio, ossia al prodotto della circonferenza, e della metà del raggio. Adunque dividendo il prodotto, che è l'aja del cerchio per un mezzo, essendo tutto il raggio uguale ad 1, si avrà il numero 6,. 2831852, che esprimerà la circonferenza. Ed essendo le aje di due rettangoli in ragion composta delle basi, e delle altezze (*prop.* 23. *VI*), sarà l'unità quadrata del raggio all' aja del cerchio in ragion composta di 1 ad un mezzo, e di 1 alla circonferenza, ossia 1: 3,1415926: : ($1: \frac{1}{2}$) (*1: circonferenza*), ed eseguendo la moltiplicazione, e duplicando i termini della prima ragione, sarà 1: 3,1413926:: 2: circonferenza; ed essendo il raggio uguale ad 1, sarà il diametro espresso dal 2: onde il diametro ha alla circonferenza la ragione di 1: 3,1415926.

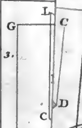
Adunque data l'espressione dell' aja ec. C. B. F.

FINE.




VITTORIO EMANUELE III BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

fig. 1.


L
C
G
3.
D
C

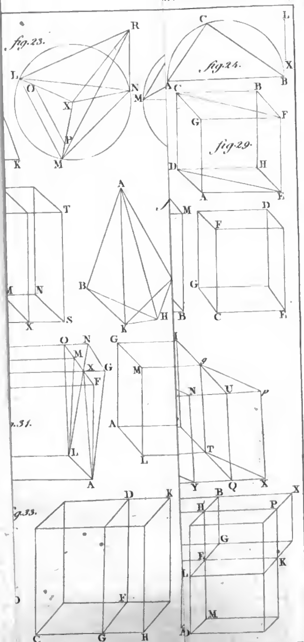
X


fig. 10.
A
D
H
F
A
E


VITTORIO EMANUELE III BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI


X

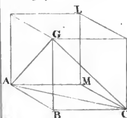

fig. 21
B

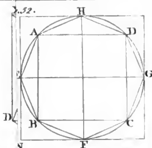

fig.23.
fig.24.
fig.29.
.31.
g.33.





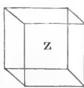


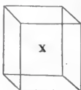

fig.51.
L
G
A
M
B
C

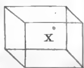

H
A
D
E
G
B
C
F

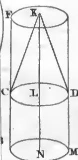

I


S
H
R

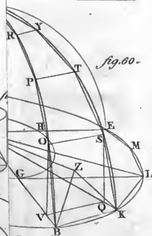

Z

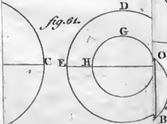

X

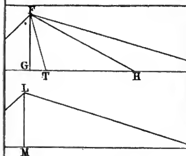

X

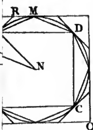

F
K
C
L
D
N
M

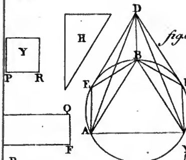

L
D
A
K
B

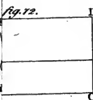

R
Y
fig.60.
T
P
H
E
O
S
M
G
Z
L
V
Q
K
B

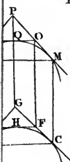

D
fig.61.
G
C
E
H
O
B

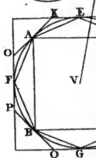

F
G
T
H
L
M

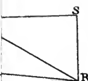

R
M
D
N
C
Q


D
H
B
Y
P
R
E
Q
A
F

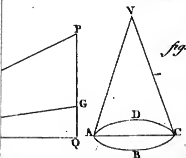

fig. 65.
H
K

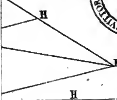

P
Q
O
M
G
H
F
C


K
E
A
O
F
V
P
B
Q
G

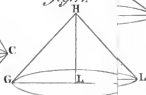

fig. 72.
D
F
C

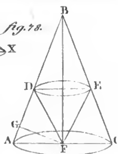


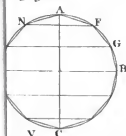

V
P
G
D
A
C
Q
B


fig. 75.
H
K
H

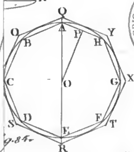












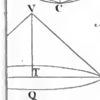
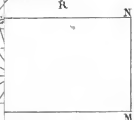


fig. 83.

N
E
M
D
L
K



Q
Y
S
R

